УДК 681.883

ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВТОРИЧНОЙ ОБРАБОТКИ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

БУТЫРСКИЙ Е.Ю.

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрены основные задачи вторичной обработки гидроакустической информации, определены основные факторы, влияющие на ее качество и основные операции ее реализующие. Представлены некоторые алгоритмы вторичной обработки.

Ключевые слова: информация; вторичная обработка; фильтрация; экстраполяция; координаты; скорость; оптимизация.

OPTIMAL ALGORITHMS OF SECONDARY TREATMENT OF HYDROACOUSTIC INFORMATION

BUTYRSKIY E.Y.

ABSTRACT

In article are considered primary tasks of the secondary processing hydroacoustic to information, are determined main factors, influencing upon her(its) quality and the main operations her(its) realizing. Some algorithms of the secondary processing are presented.

Keywords: information; secondary processing; filtering; extrapolation; coordinates; velocity; optimization.

Введение

Современный мир является неустойчивым относительно угрозы развязывания войн и вооруженных конфликтов как локальных, так и глобальных. Такое развитие геополитической обстановки ставит вопрос обеспечения безопасности морских границ Российской Федерации наиболее остро. Особенно актуально этот вопрос стал после обнаружения больших запасов нефти и газа в северных широтах. Столкновение экономических интересов неминуемо ведет к обострению политической обстановки и все нарастающей борьбы за сферы влияния и территории. Обеспечение национальной безопасности и интересов России неразрывно связано с наличием сильного Военно-морского флота. Поэтому развитие и совершенствование флота является одной из приоритетных задач нашей страны. Эффективная деятельность ВМФ, связана с решением задач навигации морских объектов, освещения надводной и подводной обстановки, слежения и управления, обеспечения выдачи целеуказаний различным видам оружия. Для этого используется информация о координатах и параметрах движения, получаемая с помощью различных гидроакустических средств (ГАС). Изменение координат подвижных объектов в общем случае, описывается случайными функциями времени, что связано с воздействием на них различных возмущений и возможными маневрами. Поэтому определение текущего местоположения подвижных объектов осуществляется методами теории фильтрации и относится к вторичной обработки гидроакустических сигналов.

Согласно этим методам, для успешного синтеза алгоритмов фильтрации необходимо располагать априорными данными о модели движения объекта.

Простейшим способом описания такой модели является представление траектории в виде полинома заданной степени с неизвестными коэффициентами. При этом оценка параметров движения объектов сводится к оценке постоянных на интервале наблюдения коэффициентов полинома.

Однако на практике прибегают к построению более сложных моделей, позволяющих учитывать случайные возмущения, действующие на объект, и его возможные маневры. В теории фильтрации подвижные объекты рассматриваются как динамические системы, состояние которых в каждый момент времени определяется конечным числом параметров образующих в совокупности вектор состояния системы.

Информация об обнаруженных в каждом обзоре целях (истинных и ложных) в виде кодов дальности, пеленга, глубины погружения поступает в цифровую систему вторичной или траекторной обработки. Совокупность данных об обнаруженной цели представляет собой информационную модель цели, которая могла бы наблюдаться на экране индикатора гидроакустической станции. Имея лишь одну отметку цели, нельзя принять обоснованное тактическое решение. Чтобы это стало возможным, необходимо иметь, по крайней мере, несколько отметок, полученных в последовательных обзорах.

Располагая информацией о координатах цели в последовательных обзорах, можно построить траекторию движения цели или координаты и параметры движения цели (КПДЦ) и отбросить ложные отметки. Обнаружение траекторий целей в процессе вторичной обработки гидроакустической информации может осуществляться автоматически с помощью ЭВМ и с помощью операторов ГАС [1-3].

В процессе вторичной обработки гидроакустической информации решаются следующие задачи:

- классификация, обнаружение и автозахват траекторий;
- сопровождение целей;
- траекторные расчеты в интересах потребителей гидроакустической информации.

Решение этих задач предполагает выполнение трех операций:

- сглаживание измеряемых параметров траектории;
- экстраполяция (предсказание) будущего положения цели;
- сравнение экстраполированного положения с вновь, полученным в текущем обзоре и определения принадлежности новой отметки принадлежности новой отметки к траектории цели.

Принцип оптимального построения КПДЦ

Процесс построения траекторий целей слагается из операции экстраполяции, сглаживания и стробирования [1-4,5,6].

Экстраполяция состоит в том, что по координатам ранее полученных отметок вычисляются координаты будущей отметки. Эта задача усложняется из-за того, что координаты отметок, используемые для предсказания, определяются с некоторыми ошибками. Для более точного решения задачи экстраполяции, а следовательно и для более правильного построения траектории осуществляется сглаживание измеренных координат отметок или параметров траекторий целей.

Рассмотрим принцип оптимального сглаживания и экстраполяции, полагая, что на входе системы вторичной обработки осуществляется преобразование полярных координат R, β в прямоугольные *x, y.* Дальнейшее решение задачи автозахвата и автосопровождения будет выполняется в прямоугольной системе координат. Тогда, с учетом характера маневрирования, изменение каждой координаты во времени можно описать полиномом первой или второй степени со случайными и независимыми коэффициентами:

$$\begin{cases} x(v,t)=\sum\limits_{i=0}^{s} v_i t^i \\ y(\eta,t)=\sum\limits_{i=0}^{s} \eta_i t^i \end{cases}, \text{ где } s=1 \text{ или } 2. \qquad (1)$$

Далее будем рассматривать лишь одну координату, так как для другой координаты решение получается аналогичным образом.

Полезный сигнал $x(v,t)$ суммируется с помехой $N(t)$. Эта помеха образует случайную функцию времени и параметров

$X(v,t)$ и складывается из случайного колебания цели вокруг траектории и ошибки измерения координат, По результатам измерения одной реализации функции $X(v,t)$ в дискретных точках $t_1, t_2, ..., t_n$ необходимо:

- найти оценку математического ожидания функции $X(v,t)$;
- решить задачу экстраполяции.

Полагаем, что помеха $N(t)$, а следовательно, и функция $X(v,t)$ имеют нормальное распределение в каждой точке. Поэтому для решения задачи оценки математического ожидания функции $X(v,t)$ достаточной статистикой является функция правдоподобия n-мерной выборки этой функции. Далее необходимо, воспользоваться правилом нахождения оценок по методу максимального правдоподобия и определить среднее значение коэффициентов v временного полинома.

Можно показать [7], что величины $\overline{v}_i$ – находятся путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\left(x_i - \sum_{i=1}^{s}\overline{v}_i t_j^i\right) = 0, \\ \sum_{j=1}^{n}\left(x_i - \sum_{i=1}^{s}\overline{v}_i t_j^i\right) t_j = 0, \\ \sum_{j=1}^{n}\left(x_i - \sum_{i=1}^{s}\overline{v}_i t_j^i\right) t_j^s = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Подставив затем v, в уравнение (1), получают оценку сглаженного значения координаты в момент последнего наблюдения либо оценку экстраполированной координаты соответственно:

$$\overline{x}(t_n) = \sum_{i=0}^{s}\overline{v}_i t_n^i, \qquad x_{\acute{y}}(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^{s}\overline{v}_i t_{n+1}^i.$$

Среднеквадратическая ошибка сглаженной и экстраполированной на один обзор координаты таким образом определяются выражениями [2,3]:

$$\sigma_{\overline{x}_n} = \sigma_x \sqrt{\frac{2(2n-1)}{n(n+1)}}, \quad \sigma_{\overline{x}_{\acute{y}}} = \sigma \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n(n-1)}}.$$

Анализ показывает, что при оптимальной фильтрации и экстраполяции по методу максимального правдоподобия для получения высокой точности оценки координат необходим одновременный учет большого числа (5-6) предыдущих наблюдений. В процессе сопровождения реальной цели необходимо иметь возможность обнаруживать начало и конец маневра, с тем, чтобы правильно выбрать количество уравнений в системе (2). С вероятностью, примерно равной 0,68, маневр по координате может быть обнаружен путем сравнения дисперсии оценки ускорения по данной координате с дисперсией оценки координаты. Алгоритм облачения маневра в этом случае запишется в виде [2,3]:

$$\begin{cases} \sigma_{\overline{a}_x}^2 \geq k\sigma_x^2 \text{ - цель маневрирует} \\ \sigma_{\overline{a}_x}^2 < k\sigma_x^2 \text{ - цель не маневрирует} \end{cases}$$

$$\text{где } \sigma_{\overline{a}_x}^2 = \frac{720\sigma_x^2}{T_0^4\left[n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)\right]}. \qquad (3)$$

Порог k при фиксированной дисперсии σ_x^2 зависит от числа наблюдений координаты n, используемых для расчета ускорения. С увеличением n порог уменьшается, что способствует повышению чувствительности алгоритма (3). Однако одновременно увеличивается время выявления маневра. Поэтому брать n больше 4-5 нецелесообразно.

Уменьшить требования к емкостным и вычислительным затратам специализированной ЭВМ вторичной обработки при одновременном повышении точности выходных данных можно путем применения принципа последовательного сглаживания координат и параметров. Сущность этого метода состоит в том, что сглаженные значения (оценки) в очередном, n-м обзоре определяются по предыдущим, полученным в n-м обзоре, сглаженным значениям и результатам последнего (в n-м обзоре) наблюдения. Независимо от числа наблюдений при оценке координат и параметров используются лишь два числа: предыдущее усреднение и новое измеренное значение. Новое среднее значение получают как взвешенную сумму предыдущего среднего значения и нового измеренного значения.

При синтезе алгоритмов последовательного сглаживания используют метод наименьших квадратов, который позволяет последовательно находить сглаженные значения координат при условной минимизации среднеквадратической ошибки приближения к истинному значению оцениваемого параметра. Каждому наблюдению при этом приписывается вес, обратно пропорциональный дисперсии наблюденного значения. Дальнейшее упрощение задачи достигается путем последовательного сглаживания КПДЦ.

Оптимальная фильтрация детерминированной траектории

Постановку задачи оптимальной фильтрации параметров детерминированной траектории движения объектов гидролокации, можно сформулировать следующим образом [2,3].

Пусть наблюдаемая случайная последовательность имеет вид:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{H}\vartheta_i + \Delta\mathbf{U}_i,$$

где $\mathbf{U}_i$ l-мерный вектор наблюдаемых координат;

ϑ_i– $(s \times 1)$-мерный вектор оцениваемых параметров траектории;

$\mathbf{H}$ – матрица размерности $(l \times s)$, устанавливающая однозначное соответствие между оценками параметров и измеряемыми координатами;

$\Delta\mathbf{U}_i$– l-мерный вектор ошибок измерения координат.

При решении задачи оптимизации делаются следующие предположения.

1. Последовательность случайных векторов $\Delta\mathbf{U}_i$ предполагается некоррелированной случайной последовательностью с математическим ожиданием $\mathbf{M}\{\Delta\mathbf{U}_i\} = 0$, и известной корреляционной матрицей.

2. Полагаем, что между предыдущими и последующими значениями параметров имеется однозначная связь, так что значение параметров в двух соседних обзорах связаны соотношением:

$\vartheta_{i+1} = \mathbf{F}\vartheta_i$, где $\mathbf{F}$ – матрица, размерности $(s \times s)$.

Задача оптимального оценивания в данном случае состоит в получении рекуррентных выражений для сглаженных значений параметров. Решим эту задачу сначала в общем виде, а затем для конкретных моделей траекторий движения подводных и надводных объектов.

Оптимальный фильтр Калмана-Бьюси

В соответствии с общей теорией фильтрации, оптимальное решение задачи последовательного сглаживания можно получить, если определить апостериорную вероятность фильтруемых параметров, которая содержит всю информацию, полученную как из априорных источников, так и результатов измерений. Зная апостериорную плотность вероятности, можно получить различные оценки фильтруемых параметров, в том числе оценки, соответствующие максимуму функции апостериорной плотности. Последние, называются оценками, оптимальными по критерию максимума апостериорной вероятности. Именно в этом смысле и понимается оптимальная фильтрация в дальнейшем. Рассмотрим в общем виде задачу последовательного сглаживания вектора параметров траектории движения цели [2,3]. При полиномиальном представлении траектории составляющими этого вектора являются: координаты, скорости изменения координат, ускорения по координатам и т. д.

Обозначим вектор сглаженных параметров через $\hat{\vartheta}_n$ с индексом n, указывающим время его привязки t_n. Порядок расположения составляющих вектора не оговаривается. Одновременно с последовательным уточнением вектора оцениваемых параметров будем формировать также последовательно корреляционную матрицу ошибок оценки этих параметров. Матрица $\mathbf{\Psi}_n$ определяет точностные характеристики сглаженных параметров на момент времени t_n и имеет размерность $(s \times s)$.

Пусть получено сглаженное значение $\hat{\vartheta}_{n-1}$ вектора параметров ϑ_{n-1} траектории цели по результатам $(n-1)$ предыдущих измерений ее координат. Распределение вектора $\hat{\vartheta}_{n-1}$ принимается нормальным с математическим ожиданием ϑ_{n-1} и корреляционной матрицей $\mathbf{\Psi}_{n-1}$.

Вектор параметров ϑ_{n-1} экстраполируется на момент следующего (n-го) измерения. Экстраполированное значение вектора параметров получается в соответствии с соотношением:

$\vartheta_{nэ} = \mathbf{F}_э \vartheta_{n-1}$ где $\mathbf{F}_э$ – известный оператор экстраполяции параметров.

Конкретный вид оператора $\mathbf{F}_э$ определяется моделью траектории цели.

Пусть вектор оцениваемых параметров траектории движения цели в момент времени t_{n-1} имеет следующий вид:

$$\hat{\vartheta}_{n-1} = \left| \hat{r}_{n-1},\ \hat{\dot{r}}_{n-1},\ \hat{\ddot{r}}_{n-1} \right|^{\mathbf{T}} = \left| \hat{r}_{n-1},\ \hat{v}_{n-1},\ \hat{a}_{n-1} \right|^{\mathbf{T}}.$$

Такое предположение соответствует представлению отдельно взятой координаты дальности в виде полинома второй степени ($\hat{r}_{n-1}$, $\hat{v}_{n-1}$, $\hat{a}_{n-1}$– оценка дальности до цели, ее скорости и ускорения соответственно).

Оператор экстраполяции параметров на время $\tau_{ý} = t_n - t_{n-1}$ можно представить треугольной матрицей:

$$\mathbf{F}_э = \begin{vmatrix} 1 & \tau_э & 0.5\tau_э^2 \\ 0 & 1 & \tau_э \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

а выражение для вектора экстраполированных параметров можно записать в следующем виде:

$$\hat{\vartheta}_{nэ} = \begin{vmatrix} \hat{r}_{nэ} \\ \hat{v}_{nэ} \\ \hat{a}_{nэ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \tau_э & 0.5\tau_э^2 \\ 0 & 1 & \tau_э \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{r}_{n-1} \\ \hat{v}_{n-1} \\ \hat{a}_{n-1} \end{vmatrix} = \mathbf{F}_э \hat{\vartheta}_{n-1}.$$

Корреляционная матрица $\mathbf{\Psi}_{n-1}$ ошибок оценки параметров по результатам $(n-1)$ измерений также пересчитывается (экстраполируется) на момент следующего измерения, т. е. на время $\tau_{ý}$.

Матричный оператор пересчета корреляционной матрицы ошибок оценки параметров к моменту времени очередного измерения координат обычно совпадает с оператором $\mathbf{F}_э$. Однако в некоторых, практически важных случаях этот оператор может отличаться от $\mathbf{F}_э$, поэтому для него вводится обозначение $\mathbf{\Phi}$.

Матрица ошибок оценки экстраполированных параметров вычисляется следующим образом. В соответствии с формулой пересчета для вектора ошибок экстраполяции параметров в n-м обзоре можно записать $\Delta\hat{\vartheta}_{nэ} = \mathbf{\Phi}\Delta\hat{\vartheta}_{n-1}$.

По определению, матрицу ошибок экстраполяции можно записать как:

$$\mathbf{\Psi}_{nэ} = \mathbf{M}\left\{ \Delta\hat{\vartheta}_{nэ} \Delta\hat{\vartheta}_{nэ}^{\mathbf{T}} \right\},$$

где $\mathbf{M}\{.\}$– оператор математического ожидания. Так как:

$$\left(\Delta\hat{\vartheta}_{nэ}\right)^{\mathbf{T}} = \left(\mathbf{\Phi}\Delta\hat{\vartheta}_{n-1}\right)^{\mathbf{T}} \to \Delta\hat{\vartheta}_{nэ}^{\mathbf{T}} = \Delta\hat{\vartheta}_{n-1}^{\mathbf{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}},$$

получаем: $\mathbf{\Psi}_{nэ} = \mathbf{\Phi}\mathbf{M}\left\{ \Delta\hat{\vartheta}_{nэ} \Delta\hat{\vartheta}_{nэ}^{\mathbf{T}} \right\}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}$.

Заменяя $\mathbf{M}\left\{ \Delta\hat{\vartheta}_{n-1} \Delta\hat{\vartheta}_{n-1}^{\mathbf{T}} \right\} = \mathbf{\Psi}_{n-1}$, окончательно имеем $\mathbf{\Psi}_{nэ} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}_{n-1}\mathbf{\Phi}^{\mathbf{T}}$.

С учетом допущения о линейности оператора экстраполяции, закон распределения вектора экстраполированных параметров будет нормальным. В векторно-матричной форме соответствующая плотность вероятности записывается так:

$$w\left(\hat{\vartheta}_{nэ}\right) = C_1 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\hat{\vartheta}_{nэ} - \vartheta_n\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{\Psi}_{nэ}^{-1} \left(\hat{\vartheta}_{nэ} - \vartheta_n\right) \right], \quad (4)$$

где ϑ_n – вектор истинных значений параметров в момент t_n.

Плотность вероятности (4) является априорной плотностью вероятности для вектора оцениваемых параметров перед очередным измерением.

В момент времени t_n производится очередное измерение координат цели. Вектор измеренных значений координат обозначается через $\mathbf{U}_n$. В общем случае измерения трех координат вектор $\mathbf{U}$ определяется следующими компонентами $\mathbf{U}_n = \left| r_n,\ \beta_n,\ \varepsilon_n \right|^{\mathbf{T}}$.

Полагаем, что ошибки измерения координат подчинены нормальному закону распределения и некоррелированы в смежных обзорах. Поэтому условную плотность вероятности выборки измеренных значений координат можно представить как:

$$w(\mathbf{U}_n|\vartheta_n) = C_2 \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{U}_n - \mathbf{H}\vartheta_n)\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{U}_n - \mathbf{H}\vartheta_n)\right], \quad (5)$$

где $\mathbf{R}^{-1}$ – обратная корреляционная матрица ошибок измерения, которая вследствие независимости измеряемых координат имеет вид:

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{vmatrix} \sigma_{rn}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\beta n}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon n}^{-2} \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{H}$ – линейный оператор соответствия оцениваемых параметров и измеряемых координат.

Например, если измеряются координаты r_n, β_n и ε_n, а оцениваются параметры $\hat{r}_n$, $\hat{\dot{r}}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\dot{\beta}}_n$, $\hat{\varepsilon}_n$, $\hat{\dot{\varepsilon}}_n$, то оператор $\mathbf{H}$ имеет вид прямоугольной матрицы порядка (6×3):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \hat{r}_n & \hat{\dot{r}}_n & \hat{\beta}_n & \hat{\dot{\beta}}_n & \hat{\varepsilon}_n & \hat{\dot{\varepsilon}}_n \end{array} \\ \mathbf{H} = \begin{array}{c} r_n \\ \beta_n \\ \varepsilon_n \end{array} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \end{array}$$

Произведение $\mathbf{H}\vartheta_n$ в формуле (5) представляет собой вектор истинных значений измеряемых координат в момент времени t_n.

Если положить, что отсутствует междуобзорная корреляции ошибок измерения, апостериорное распределение для вектора оценок параметров после n-го измерения координат можно определить по формуле Байеса:

$$w(\hat{\vartheta}_n|\mathbf{U}_n) = C_3 w(\hat{\vartheta}_{n\text{э}}) w(\mathbf{U}_n|\vartheta_n), \quad (6)$$

где C_3 – нормирующий множитель, определяющий масштаб кривой $w(\hat{\vartheta}_n|\mathbf{U}_n)$ таким образом, чтобы площадь под этой кривой была равна единице.

Вследствие нормальности составляющих распределений апостериорное распределение (6) является нормальным. Соответствующая плотность вероятности записывается в виде:

$$w(\hat{\vartheta}_n|\mathbf{U}_n) = C_4 \exp\left[-\frac{1}{2}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_n)^{\mathbf{T}} \mathbf{\Psi}_n^{-1}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_n)\right], \quad (7)$$

где $\hat{\vartheta}_n$ – вектор сглаженных параметров по результатам n измерений координат; $\mathbf{\Psi}_n$ – матрица ошибок оценки сглаженных параметров. Для нормального распределения $\max\left[w(\hat{\vartheta}_n|\mathbf{U}_n)\right]$ совпадает с математическим ожиданием вектора оцениваемых параметров. Следовательно, задача оценки параметров по максимуму апостериорной вероятности сводится в нашем случае к нахождению параметров $\hat{\vartheta}_n$ и $\mathbf{\Psi}_n$ в выражении (7).

Используя выражения (4) и (5) для плотностей вероятности, входящих в формулу (6), после логарифмирования имеем:

$$\begin{aligned}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_n)^{\mathbf{T}} \mathbf{\Psi}_n^{-1}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_n) = (\hat{\vartheta}_{n\text{э}} - \vartheta_n)^{\mathbf{T}} \mathbf{\Psi}_{n\text{э}}^{-1}(\hat{\vartheta}_{n\text{э}} - \vartheta_n) + \\ + (\mathbf{U}_n - \mathbf{H}\vartheta_n)^{\mathbf{T}} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{U}_n - \mathbf{H}\vartheta_n) + \mathrm{const}\end{aligned}. \quad (8)$$

Последнее уравнение является исходным для нахождения вектора $\hat{\vartheta}_n$ и матрицы $\mathbf{\Psi}_n$.

Выделяя члены, представляющие собой квадратичные формы для вектора $\hat{\vartheta}_n$ получим:

$$\vartheta_n^{\mathbf{T}}\mathbf{\Psi}_n^{-1}\vartheta_n = \vartheta_n^{\mathbf{T}}\mathbf{\Psi}_{n\text{э}}^{-1}\vartheta_n + \vartheta_n^{\mathbf{T}}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\vartheta_n.$$

Из этого уравнения получаем:

$$\mathbf{\Psi}_n^{-1} = \mathbf{\Psi}_{n\text{э}}^{-1} + \mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}. \quad (9)$$

Проведя операции по обращению матриц в выражении (9) приходим к следующему окончательному результату [1-3]:

$$\mathbf{\Psi}_n = \mathbf{\Psi}_{n\text{э}} - \mathbf{\Psi}_{n\text{э}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}\mathbf{\Psi}_{n\text{э}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{\Psi}_{n\text{э}}.$$

Сравнивая в уравнении (8) квадратичные формы, содержащие $\vartheta_n^{\mathbf{T}}$ слева, получаем:

$$\vartheta_n^{\mathbf{T}}\mathbf{\Psi}_n^{-1}\hat{\vartheta}_n = \vartheta_n^{\mathbf{T}}\mathbf{\Psi}_{n\text{э}}^{-1}\hat{\vartheta}_{n\text{э}} + \vartheta_n^{\mathbf{T}}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_n.$$

Из этого уравнения находим

$$\hat{\vartheta}_n = \mathbf{\Psi}_n\left[\mathbf{\Psi}_{n\text{э}}^{-1}\hat{\vartheta}_{n\text{э}} + \mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_n\right].$$

После несложных преобразований с учетом (9) можно получить следующее выражение [2,3]:

$$\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_{nэ} + \mathbf{\Psi}_n \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}^{-1} \left[\mathbf{U}_n - \mathbf{H} \hat{\vartheta}_{nэ} \right]. \qquad (10)$$

В соответствии с выражением (10) вектор сглаженных значений параметров по результатам n измерений координат получается как сумма вектора экстраполированных на момент n-го измерения параметров и взвешенного с некоторым коэффициентом сглаживания рассогласования между измеренными и экстраполированными значениями координат. Ниже основные соотношения оптимального алгоритма определения КПДЦ записаны в порядке выполнения операций:

1. $\hat{\vartheta}_{nэ} = \mathbf{F}_э \hat{\vartheta}_{n-1}$,
2. $\mathbf{\Psi}_{nэ} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Psi}_{n-1} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$,
3. $\mathbf{\Psi}_n = \mathbf{\Psi}_{nэ} - \mathbf{\Psi}_{nэ} \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{H} \mathbf{\Psi}_{nэ} \mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{\Psi}_{nэ}$,
4. $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_{nэ} + \mathbf{\Psi}_n \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}^{-1} \left[\mathbf{U}_n - \hat{\mathbf{U}}_{nэ} \right]$.

(11)

где $\hat{\mathbf{U}}_{nэ}$ – вектор экстраполированных значений координат.

Систему уравнений (11) часто называют уравнениями фильтра Калмана-Бьюси [2, 3].

Алгоритм фильтрации параметров линейной траектории

Закон изменения координат линейной траектории записывается в виде:

$$\begin{cases} r(t) = r_0 + \dot{r}_0 (t - t_0), \\ \beta(t) = \beta_0 + \dot{\beta}_0 (t - t_0), \\ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon}_0 (t - t_0). \end{cases}$$

Фильтрацию параметров линейной траектории можно проводить раздельно по каждой координате, так как последние не связаны между собой. Для примера рассмотрим последовательное сглаживание параметров по координате дальности $r(t)$ при равнодискретном ее наблюдении с периодом T_0 [1-3].

1. Пусть по данным предыдущих $(n-1)$ обзоров получены вектор сглаженных параметров:

$$\hat{\vartheta}_{n-1} = \begin{vmatrix} \hat{r}_{n-1} \\ \hat{\dot{r}}_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{r}_{n-1} \\ \hat{v}_{n-1} \end{vmatrix}$$

и корреляционная матрица ошибок оценки этих параметров [2,3]:

$$\mathbf{\Psi}_{n-1} = \frac{1}{K_{n-1}} \begin{vmatrix} h_{n-1} & \dfrac{g_{n-1}}{T_0} \\ \dfrac{g_{n-1}}{T_0} & \dfrac{f_{n-1}}{T_0^2} \end{vmatrix}.$$

2. В соответствии с принятой моделью траектории, экстраполяция координаты на следующий обзор производится по линейному закону при условии постоянства скорости ее изменения. Следовательно, в рассматриваемом случае вектор экстраполированных параметров имеет вид:

$$\hat{\vartheta}_{nэ} = \begin{vmatrix} \hat{r}_{nэ} \\ \hat{\dot{r}}_{nэ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{r}_{nэ} \\ \hat{v}_{nэ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{r}_{n-1} + \hat{\dot{r}}_{n-1} T_0 \\ \hat{\dot{r}}_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{r}_{n-1} + \hat{v}_{n-1} T_0 \\ \dot{v}_{n-1} \end{vmatrix},$$

а оператор экстраполяции $\mathbf{F}_э$ (так же как и оператор пересчета ошибок $\mathbf{\Phi}$), записывается в виде матрицы:

$$\mathbf{F}_э = \mathbf{\Phi} = \begin{vmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Корреляционная матрица ошибок экстраполяции вычисляется по следующей формуле:

$$\mathbf{\Psi}_{nэ} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Psi}_{n-1} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{h_{n-1}}{K_{n-1}} & \dfrac{g_{n-1}}{K_{n-1} T_0} \\ \dfrac{g_{n-1}}{K_{n-1} T_0} & \dfrac{f_{n-1}}{K_{n-1} T_0^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

В результате выполнений операций перемножения матриц получим окончательно:

$$\mathbf{\Psi}_{nэ} = \frac{1}{K_{n-1}} \begin{vmatrix} h_{n-1} + 2g_{n-1} + f_{n-1} & \dfrac{g_{n-1} + f_{n-1}}{T_0} \\ \dfrac{g_{n-1} + f_{n-1}}{T_0} & \dfrac{f_{n-1}}{T_0^2} \end{vmatrix}.$$

3. Вычислим теперь корреляционную матрицу ошибок сглаживания параметров с учетом последнего (n-го) измерения координаты. Для этого воспользуемся формулой (5). В этой формуле (для рассматриваемого случая):

$\mathbf{R}_n = \sigma_{rn}^2$ – дисперсия ошибки измерения дальности в n обзоре,

$\mathbf{H} = |1 \quad 0|$ – вектор-строка,

$$\mathbf{H\Psi}_{nэ}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \psi_{11(nэ)}, \ \left[\mathbf{H\Psi}_{nэ}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\right]^{-1} = \frac{1}{\psi_{11(nэ)} + \sigma_{rn}^2}.$$

Запишем матрицу $\mathbf{\Psi}_n$ в общем виде:

$$\mathbf{\Psi}_n = \begin{vmatrix} \psi_{11(n)} & \psi_{12(n)} \\ \psi_{21(n)} & \psi_{22(n)} \end{vmatrix}.$$

Производя вычисления в соответствии с формулой (10) для элементов матрицы $\mathbf{\Psi}_n$, получаем следующие выражения:

$$\psi_{11(n)} = \frac{1}{1 + w_{rn}\psi_{11(ný)}}, \ w_{rn} = \sigma_{rn}^{-2}.$$

$$\psi_{22(ný)} = \psi_{22(n)} - \frac{w_{rn}\psi_{21(ný)}\psi_{12(ný)}}{1 + w_{rn}\psi_{11(ný)}};$$

$$\psi_{12(n)} = \psi_{21(n)} = \frac{\psi_{12(ný)}}{1 + w_{rn}\psi_{11(ný)}}.$$

Дальнейшие преобразования этих выражений позволяют записать матрицу $\mathbf{\Psi}_n$ в следующем компактном виде:

$$\mathbf{\Psi}_n = \frac{1}{K_n}\begin{vmatrix} h_n & \dfrac{g_n}{T_0} \\ \dfrac{g_n}{T_0} & \dfrac{f_n}{T_0^2} \end{vmatrix}, \qquad (12)$$

где $h_n = h_{n-1} + 2g_{n-1} + f_{n-1}$; $g_n = g_{n-1} + f_{n-1}$;
$f_n = f_{n-1} + w_{rn}$; $K_n = K_{n-1} + w_{rn}h_n$.

Полученные формулы позволяют непосредственно формировать элементы матрицы $\mathbf{\Psi}_n$ из элементов матрицы $\mathbf{\Psi}_{n-1}$ и веса w_{rn} последнего измерения координаты. Если экстраполяция производится на произвольный интервал времени $\Delta t_ý$, формулы для h_n и g_n приобретают вид:

$$h_n = h_{n-1} + 2g_{n-1}\left(\frac{\Delta t_ý}{T_0}\right) + f_{n-1}\left(\frac{\Delta t_ý}{T_0}\right)^2,$$

$$g_n = g_{n-1} + f_n\left(\frac{\Delta t_ý}{T_0}\right).$$

4. Получим теперь формулы для вычисления сглаженных параметров в соответствии с общим выражением (11). В этом выражении (для рассматриваемого случая):

$$\mathbf{H}\hat{\vartheta}_{nэ} = \hat{r}_{nэ}, \quad \mathbf{\Psi}_n\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1} = \begin{vmatrix} \psi_{11(n)}w_{rn} \\ \psi_{21(n)}w_{rn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_n \\ B_n T_0^{-1} \end{vmatrix}.$$

С учетом последних соотношений окончательные формулы для вычисления сглаженных параметров линейной траектории имеют вид:

$$\hat{r}_n = \hat{r}_{nэ} + A_n\left(r_n - \hat{r}_{nэ}\right),$$

$$\hat{v}_n = \hat{v}_{n-1} + B_n T_0^{-1}\left(r_n - \hat{r}_{nэ}\right). \qquad (13)$$

Входящие в эти формулы коэффициенты A_n и B_n называются коэффициентами сглаживания координаты и скорости соответственно. С учетом выражения (12) эти коэффициенты можно записать в виде:

$$A_n = \frac{h_n w_{rn}}{K_n}, \quad B_n = \frac{6}{n(n+1)}. \qquad (14)$$

Если в очередном (n-м) обзоре имеет место пропуск отметки, то $w_{rn} = 0$, $\left(\sigma_{rn}^2 = \infty\right)$ и $A_n = B_n = 0$. В качестве сглаженного значения координаты и скорости в этом случае принимаются их экстраполированные значения.

5. При равнодискретных и равноточных (без пропусков) измерениях координаты имеем:

$$f_n = n, \ g_n = \frac{n(n-1)}{2}, \ h_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \ K_n = \frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}.$$

Подставляя эти значения в выражение (14), получаем:

$$A_n = \frac{2(2n-1)}{n(n+1)}, \qquad B_n = \frac{6}{n(n+1)}.$$

Из последних выражений следует, что с увеличением n результаты последних наблюдений при сглаживании координаты и скорости учитываются – все с меньшим весом и алгоритм перестает реагировать на изменение входного сигнала. В этом существенный недостаток рассматриваемого метода, если иметь в виду, что для реальных целей траектория движения подвержена случайным флюктуациям.

Определение КПДЦ при коррелированных ошибках измерения

Рассмотрим вариант последовательного сглаживания параметров траектории при наличии корреляции в ошибках измерения, т. е. когда [1-3]:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{H}\vartheta_n + \Delta\mathbf{U}_n \cdot$$

Последовательность $\Delta\mathbf{U}_n$ представляет собой коррелированную случайную последовательность с известной корреляционной функцией.

Если корреляционная функция случайного процесса может быть представлена как [2,3];

$$R_{\mathbf{U}}(k) = \sigma^2_{\mathbf{U}n}\exp\left[-\alpha|k|T_0\right] = \sigma^2_{\mathbf{U}n}\rho^{|k|},$$

то с помощью формирующего фильтра можно коррелированный процесс представить в виде;

$$\Delta\mathbf{U}_{n+1} = \rho\Delta\mathbf{U}_n + \xi_n, \qquad (15)$$

где $\rho\Delta\mathbf{U}_n$ – предсказуемая часть процесса;

ξ_n – случайная последовательность с равным нулю математическим ожиданием и дисперсией: $\sigma^2_{\xi n} = \sigma^2_{\mathbf{U}n}\left(1-\rho^2\right)$.

Если входной сигнал l-мерный вектор, то вместо ρ в (15) будет матрица $\mathbf{P}$ коэффициентов корреляции ρ, а вместо $\sigma^2_{\xi n}$ – диагональная матрица;

$$\mathbf{R}_n = \begin{vmatrix} \sigma^2_{\xi n1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\xi n2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \sigma^2_{\xi nl} \end{vmatrix}.$$

Наличие предсказуемой части позволяет прогнозировать и сглаживать ошибки измерения. Поэтому для решения задачи фильтрации параметров в рассматриваемом случае применяется прием, суть которого состоит в расширении вектора оцениваемых параметров за счет включения в него вектора ошибок измерения. Расширенный вектор оцениваемых параметров записывается в следующем виде (для n-го такта);

$$\vartheta^{\mathbf{T}}_{n(\rho)} = \left|\theta_{n1}...\,\theta_{ns}\ \Delta U_{n1}...\,\Delta U_{nl}\right| = \left|\vartheta_n\left|\Delta\mathbf{U}_n\right.\right|.$$

Уравнение динамического состояния системы, связывающее между собой предыдущее и последующее значения расширенного вектора оцениваемых параметров, записывается теперь в виде;

$$\vartheta_{n+1(\rho)} = \mathbf{F}_{(\rho)}\vartheta_{n(\rho)} + \begin{vmatrix} 0 \\ ... \\ \xi_n \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathbf{F}_{(\rho)} = \begin{vmatrix} \mathbf{F} & | & \mathbf{0} \\ ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{P} \end{vmatrix}.$$

При таком представлении вектора оцениваемых параметров, измеренные значения координат являются «точными», т. е. не содержат ошибок;

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{H}_{(\rho)}\vartheta_{n(\rho)},$$

где $\mathbf{H}_{(\rho)} = \left|\mathbf{H}\ \middle|\ 0\right|$ – расширенная матрица, определяющая соответствие между измеренными координатами и оцениваемыми параметрами.

Процесс последовательного сглаживания расширенного вектора параметров состоит теперь в следующем:

1) экстраполяция параметров производится по формуле;

$$\hat{\vartheta}_{nэ(\rho)} = \mathbf{F}_{(\rho)}\hat{\vartheta}_{n-1(\rho)}\ .$$

2) корреляционная матрица ошибок экстраполяции рассчитывается по формуле:

$$\Psi_{nэ(\rho)} = \mathbf{F}_{(\rho)}\Psi_{n-1(\rho)}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}_{(\rho)} + \begin{vmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & .... & \mathbf{R}_{n-1} \end{vmatrix}.$$

3) корреляционная матрица ошибок оценки параметров по результатам n измерений:

$$\mathbf{\Psi}_{n(\rho)} = \mathbf{\Psi}_{nэ} - \mathbf{\Psi}_{nэ(\rho)}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}_{(\rho)}\left[\mathbf{H}_{(\rho)}\mathbf{\Psi}_{nэ(\rho)}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}_{(\rho)}\right]^{-1}\mathbf{H}_{(\rho)}\mathbf{\Psi}_{nэ(\rho)}\ ,$$

4) вектор параметров после n измерений:

$$\hat{\vartheta}_{n(\rho)} = \hat{\vartheta}_{nэ(\rho)} - \mathbf{\Psi}_{nэ(\rho)}\mathbf{H}_{(\rho)}\left[\mathbf{H}_{(\rho)}\mathbf{\Psi}_{nэ(\rho)}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}_{(\rho)}\right]^{-1}\left[\mathbf{U}_n - \mathbf{H}_{(\rho)}\mathbf{F}_{(\rho)}\vartheta_{n-1(\rho)}\right].$$

Недостатком рассмотренного метода является усложнение расчетов из-за увеличения размерности вектора оцениваемых параметров, причем сглаженные значения ошибок измерения обычно интереса не представляют.

Возможен другой подход к решению поставленной задачи, позволяющий обойтись без расширения вектора оцениваемых параметров [9]. Для этого с помощью матриц $\mathbf{F}$ и $\mathbf{\Psi}$ сначала определяется линейная комбинация двух последних значений вектора измерений $\mathbf{U}_n$ и $\mathbf{U}_{n-1}$, не содержащая $\Delta\mathbf{U}$. Такой комбинацией может быть следующая:

$$\zeta_{n-1} = \mathbf{U}_n - \Psi\mathbf{U}_{n-1} = \left(\mathbf{HF} - \Psi\mathbf{H}\right)\vartheta_{n-1} + \xi_{n-1} =,$$

$$= \mathbf{H}'\vartheta_{n-1} + \xi_{n-1}, \quad \mathbf{H}' = \left(\mathbf{HF} - \mathbf{\Psi H}\right).$$

Последовательные значения ζ_i, можно считать «измеренными» значениями некоторого вектора, который содержит только чисто случайную составляющую ошибок ζ_i и задача теперь может быть решена с применением обычных формул последовательного сглаживания.

Выводы

Анализ уравнений фильтра Калмана-Бьюси показывает следующие достоинства при его использования для определения КПДЦ:

1. В расчетах непосредственно используется информация только о двух соседних моментах времени, что позволяет оценивать изменяющийся во времени вектор неизвестных параметров и снижает жесткость требований к прямолинейному и равномерному движению цели в течение всего времени определения КПДЦ.

2. В процессе решения задачи обеспечивается возможность задания различной информации о цели, поступающей в любые моменты времени в произвольном сочетании и с разной точностью

3. При получении оценок динамической системы (цели) учитываются не только измеренные и априорные величины, но и законы их распределения.

4. Выражения (11) являются универсальными при решении различных задач. Специфика каждой задачи определяется выбором вектора состояния, возможным набором измеряемых параметров и видом $\mathbf{F}_{\dot{y}}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{H}$. Конкретный вид указанных величин и определяет реальную математическую модель решения задачи методом фильтрации.

Список литературы

1. Гришин Ю. П. и др. Радиотехнические системы. – М.: Высшая школа, 1990. – 496 с.

2. Кузьмин С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Сов. радио, 1986. – 351 с.

3. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Сов. радио, 1974. – 431 с.

4. Верховых Н.С. Вторичная и третичная обработка информации. – СПб, ВМА, 1996.

5. Попов К.И. Технические методы обработки и отображения радиолокационной информации. – Л., ВМА, 1973. – 326 с.

6. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. – М., Радио и связь, 1992. – 304 с.

7. Воскресенский В.В., Доценко С.М., Чудаков О.Е. Информационное обеспечение управления и флот. / Под ред. Г.Н. Королькова. – С.Пб.: Ника, 2002.

8. Бурдик В.С. Анализ гидроакустических систем. – Л.: Судостроение, 1988. – 392 с.

9. Ярлыков М.С. Статистическая теория радионавигации. – М.: Радио и связь, 1985. – 343 с.