УДК 681.519 DOI: 10.37468/2307-1400-2021-4-20-32

БУТЫРСКИЙ ЕВГЕНИЙ ЮРЬЕВИЧ
САПРЫКИН АЛЕКСЕЙ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ
ЯКОВЛЕВ АЛЕКСЕЙ ИВАНОВИЧ

ГРУППОВЫЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ВЛИЯНИЕ СРЕДЫ

АННОТАЦИЯ

В статье проводится дальнейшее развитие групповых моделей сигналов инвариантных относительно групп пребразований. Принципиалььным отличием рассмотренных моделей является учет некоммутативности импульсных характеристик сред, а также разработки новой модели функции когерентности широкополосных сигналов. Доказано, что вычисление квадрата модуля свертки групповых сигналов можно представить, как вычисление взаимной обобщенной функции неопределенности сигналов, а влияние канала рассматривать как фильтрацию через системы с импульсной характеристикой инвариантной относительно заданной группы преобразований.

Ключевые слова: групповой сигнал, групповая корреляционная функция, обобщенное преобразование Фурье, функция когерентности, акустическая энергия.

BUTYRSKIY E. YU.
SAPRYKIN A. V.
YAKOVLEV A. I.

GROUP SIGNAL MODELS AND ENVIRONMENTAL INFLUENCES

ABSTRACT

The article will continue the further development of group models of invariant signals with respect to prebrasion groups. The fundamental difference of the considered models is to take into account the non-commutativity of the pulse characteristics of the media, as well as the development of a new model of the coherence function of broadband signals. It is proved that the calculation of the square of the convolution module of group signals can be represented as the calculation of the mutual generalized function of signal uncertainty, and the effect of the channel can be considered as filtering through systems with a pulse characteristic invariant relative to a given group of transformation

Keywords: group signal, group correlation function, generalized Fourier transform, coherence function, acoustic energy.

Введение

Прогресс науки и техники тесно связан с разработкой и освоением теории и практики различных технических систем обработки информации. Изучение Мирового Океана неразрывно связано с развитием гидроакустических средств как гражданского, так и военного назначения. Широкое внедрение вычислительных средств позволяет реализовывать все более сложные математические моделеи, с целью адекватного отображения преобразования сложных широкополосных сигналов (ШПС) в среде и описания сопутствующих шумов и помех. Все это требует учета согласования средств обработки с симметрией сигналов, которые возникают в процессе распространения сигнала в океанической среде и отражении от подвижных целей. Одно из перспективных направлений в развитии теории сигналов основано на теоретико-групповых представлениях, которое позволяет учесть преобразование ШПС и с единых позиций трактовать теорию сигналов, повысить эффективность решения задач обнаружения, уменьшить вычислительные и емкостные затраты. Новизна рассмотренных в статье решений состоит в исследовании преобразований сигналов в каналах как действие групповых операций между сигналами и импульсными характеристиками гидроакустических каналов. Это взаимодействие может быть описано сверткой. Свойства свертки, как правило, полагают инвариантными относительно сдвига во времени и пространтсве, что соответствует условию простевенно-временной стационарности канала. Однако разообразие различных физических процессов, возникающих при передаче акустичепской энергии в Мировом Океане, в том числе порождаемых движением носителя ГАС и цели, не позволяет считать гипотезу их однородности и стационарности справедливой. Необходимо отметить, что большой вклад во внедрение и развитие теоретико-группового подхода в гидроакустику внес В.А. Сапрыкин, начальник кафедры ВВМУРЭ им. А.С.Попова. Его научная школа включает более ста кандидатов и докторов наук.

В связи с вышесказанным, тематика научного исследованния рассмотренного статье и направленного на построение групповых математических моделей гидроакустических сигналов и взаимдействия со средой является важной и актуальной как в теоретическом, так и в практическом плане.

Групповые модели гидроакустических сигналов

Процесс влияния океанической среды представим в виде следующей посдедовательности этапов.

1. Рассматривается понятие «действия среды на сигнал (преобразования сигнала)» в виде определения сначала понятия группового сигнала $s(g)$, где $g \in G$, G – группа преобразований, и задания далее обобщенной (абстрактной) операции $T(g)$ действия на сигнал [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

$$T(g_0)s(g) = s(g_0^{-1}g). \qquad (1)$$

При этом множество $\{T(g)\}$ также образует группу преобразований.

2. Решается обратная задача, суть которой состоит в нахождении в классах групп преобразований $\{T(g)\}$ конкрентного класса представления $\{T_0\}$, который наилучшим образом описывает физическую природу передачи сигналов в Океане.
3. На основе конкретного представления $\{T_0\}$ групп G_0 формируется свертка и взаимная корреляционная функция групповых сигналов, т.е. формируются методы гармонического анализа, с помощью которых и решается поствленная научно-техническая проблема.

При описании физических явлений и сигналов интерес представляют только те модели, которые обладают симметрией (устойчивостью, инвариантностью), относительно выбранной системы координат.

Важнейшей точкой зрения в исследовании различных каналов передачи информации является гармонический анализ групповой природы, позволяющий ввести такие новые энергетические характеристики как спектральные, а также взаимные спектральные плотности между входом и выходом канала на группах. Кроме аддитивных шумов в гидроакустическом канале присутствуют мультипликативные флюктуации, интерпретируемые как сверточные шумы. Природа формирования этих шумов зависят от многих факторов, в том числе температуры, внутренних волн и т.д.

Из физических представлений можно выделить группу линейных преобразований времени (аддитивно-мультипликативное преобразование), которая является произведением группы сдвига и группы подобия, которую будем обозначать как AM. К этому преобразованию необходимо относится системно, т.е. рассматривать его как единое физическое явление. При таком подходе удается получить системмые свойства сигналов, которые невозможно выявить при изучении ее подгрупп. При изучения группы AM, рассмотрим подход, при котором с помощью свойств группы M (мультипликативная группа) изучаются смежные классы AM / A (фактор-группа), так как в результаты деления группы AM на группу A (аддитивная грууппа) формируется группа изоморфная группе

M, неприводимыми представлениями которой являются гиперболические (мультипликативные) гармоники.

Рассмотрим свойства групповых моделей сигналов и свойства групповой корреляционной функции. Поскольку при выводе свойств групповой функции отклика были использованы только абстрактные понятия меры и интеграла, то это дает основание утверждать, что указанное определение корреляционной функции можно использовать для любой локально-компактной группы при условии, что для нее введены свертка групповых сигналов и операция инверсии. Таким образом, если из физических соображений известна конструкция группы преобразований сигнала, в том числе имеющая природу локально-компактной группы, то всегда можно построить широкополосную функции отклика и широкополосную функцию неопределенности сигналов. Это обосновывает построение базовой операции обработки широкополосных сигналов при передаче через гидроакустический канал.

В качестве базовой операции передачи сигналов в гидроакустическом канале выбирают взаимно корреляционную функцию, решающую задачу сжатия групповых сигналов [1-7]. Для описания преобразований в акустической среде рассмотрим абстрактную некоммутативную группу Ли G, действие элементов $g \in G$ для пространства аргумента $x \in X$, определяется правилом gx.

Операция инверсии $g \mapsto g^{-1}$ (g^{-1} – обратный элемент, т.е. $gg^{-1} = e$) индуцирует в пространстве сигналов $s(g)$ операцию инволюции

$s(g) \to \overline{s(g^{-1})}$, черта – комплексное сопряжение.

В силу некоммутативности группы линейного преобразования, необходимо отличать левую и правую взаимно-корреляционные функции [1-3, 4-8, 9].

Левая взаимная корреляционная функция группового сигнала определяется следующим образом:

$$\chi_{l\,s_1,s_2}(g) = s_1(g)\underset{l}{*}\overline{s_2(g^{-1})} = \int_G s_1(g_1)\overline{s_2(g^{-1}g_1)}d_l g_1 =$$

$$= \int_G s_1(gg_1^{-1})\overline{s_2(g_1^{-1})}|g_1|d_l g_1 = \int_G s_1(g_1^{-1})\overline{s_2(g^{-1}g_1^{-1})}|g_1|d_l g_1$$

Правая взаимная корреляционная функция (ВКФ) группового сигнала определяется соотношением:

$$r_{r\,s_1,s_2}(g) = \left(s_1(g)\underset{r}{*}\overline{s_2(g^{-1})}\right) =$$

$$= \int_G s_1(g_1)\overline{s_2(g_1 g^{-1})}d_r g_1 = \int_G s_1(g_1 g)\overline{s_2(g_1)}d_r g_1 =$$

$$= \int_G s(g_1^{-1}g)\overline{s(g_1^{-1})}\frac{d_r g_1}{|g_1|} = \int_G s(g_1^{-1})\overline{s(g_1^{-1}g^{-1})}\frac{d_r g_1}{|g_1|}$$

Правой и левой автокорреляционными функциями называют групповые сигналы вида:

$$\chi_{l\,s,s}(g) = s(g)\underset{l}{*}\overline{s(g^{-1})},\ \chi_{r\,s,s}(g) = s(g)\underset{r}{*}\overline{s(g^{-1})}. \quad (2)$$

Свойства корреляционных функций:

1. Симметричность автокорреляционных функций:

$$\overline{\chi_{l\,s,s}(g^{-1})} = \chi_{l\,s,s}(g),\ \overline{\chi_{r\,s,s}(g^{-1})} = \chi_{r\,s,s}(g),$$

$$\overline{\chi_{l\,s,s}(g^{-1})} = \int_G \overline{s(g_1)}s(gg_1)d_l g_1 =$$

$$= \int_G s(gg_1)\overline{s(g_1)}d_l g_1 = \chi_{l\,s,s}(g),$$

$$\overline{\chi_{r\,s,s}(g^{-1})} = \int_G \overline{s(g_1)}s(g_1 g)d_r g_1 =$$

$$\int_G s(g_1 g)\overline{s(g_1)}d_r g_1 = \chi_{r\,s,s}(g).$$

2. Модуль автокорреляционной функции достигает на единичном элементе e своего максимума: $\left|\chi_{l\,s,s}(g)\right| \le \left|\chi_{l\,s,s}(e)\right|$, $\left|\chi_{r\,s,s}(g)\right| \le \left|\chi_{r\,s,s}(e)\right|$, $g \in G$.

Доказательство. ◀ Для доказательства воспользуемся неравенством Коши -Буняковского.

$$\left|\chi_{l\,s,s}(g)\right| = \left|\int_G s(gg_1)\overline{s(g_1)}d_l g_1\right| \le \left|\int_G |s(gg_1)|^2 d_l g_1\right|^{1/2}\left|\int_G |s(g_1)|^2 d_l g_1\right|^{1/2} =$$

$$= \left|\int_G |s(g_1)|^2 d_l g_1\right|^{1/2}\left|\int_G |s(g_1)|^2 d_l g_1\right|^{1/2} = \left|\int_G |s(g_1)|^2 d_l g_1\right| = \left|\chi_{l\,s,s}(e)\right| \quad .$$

Таким образом, свойство 2 доказано. ▶

Здесь было использовано свойство инвариантности левой меры:

$$\int_G |s(gg_1)|^2 d_l g = \int_G |s(g_1)|^2 d_l g. \quad (3)$$

Аналогично доказывается свойство 2 и для правой меры.

3. Реакция левой взаимной корреляционной функции при формировании сигналов $s_1(g)$ и $s_2(g)$ правилами: $s_1(g) = s(g)$, $s_2(g) = T(g_*)\{s(g)\} = s(g_*^{-1}g)$ и задается соотношением: $\chi_{l\,s(g),s(g_*^{-1}g)}(g) = \chi_{l\,s,s}(gg_*)$.

Доказательство. ◀ По определению левая АКФ задается соотношнем:

$$\underset{l}{\chi}_{s(g),s\left(g_*^{-1}g\right)}=\int_G s\left(gg_1\right)\overline{s(g_*^{-1}g_1)}d_l g_1 .$$

Делая замену переменной $g_2=g_*^{-1}g_1$, $g_{_*}g_2=g_1$ и, воспользовавшись инвариантностью левой меры, получим $\int_G s\left(gg_{_*}g_2\right)\overline{s(g_2)}d_l g_2=\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(gg_{_*}\right)$.► Ч.т.д.

4. Реакция левой ВКФ при формировании сигналов $s_1\left(g\right)$ и $s_2\left(g\right)$ определяется правилами: $s_1\left(g\right)=s\left(g_*^{-1}g\right)$, $s_2\left(g\right)=s\left(g\right)$ и задается соотношением:

$$\underset{l}{\chi}_{s\left(g_*^{-1}g\right),s(g)}\left(g\right)=\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(g_*^{-1}g\right).$$

Доказательство. ◄ АКФ в это случае можно записать как:

$$\underset{l}{\chi}_{s\left(g_*^{-1}g\right),s(g)}\left(g\right)=\int_G s\left(g_*^{-1}g_1\right)\overline{s(g^{-1}g_1)}d_l g_1 .$$

Делая замену переменной $g_2=g^{-1}g_1$, $gg_2=g_1$ и, воспользовавшись инвариантностью левой меры, получим $\int_G s\left(g_*^{-1}gg_2\right)\overline{s(g_2)}d_l g_2=\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(g_*^{-1}g\right)$. ► Ч.т.д.

5. Реакция правой взаимной корреляционной функции на сигналы:

$$s_1\left(g\right)=s\left(g\right),\ s_2\left(g\right)=T\left(g_*\right)\left\{s\left(g\right)\right\}=s\left(gg_*\right),$$

задается соотношением: $\underset{l}{\chi}_{s(g),s(gg_*)}\left(g\right)=\underset{r}{\chi}_{s,s}\left(g_*^{-1}g\right)$.

Доказательство. ◄ АКФ в этом случае можно записать как:

$$\underset{l}{\chi}_{s(g),s(gg_*)}\left(g\right)=\int_G s\left(g_1g\right)\overline{s(g_1g_*)}d_r g_1 . \qquad (4)$$

Делая замену переменной $g_2=g_1g_*$, $g_1=g_2g_*^{-1}$ и, воспользовавшись инвариантностью правой меры, получим $\int_G s\left(g_2g_*^{-1}g\right)\overline{s(g_2)}d_r g_2=\underset{r}{\chi}_{s,s}\left(g_*^{-1}g\right)$. ► Ч.т.д.

6. Реакция правой взаимной корреляционной функцией на сигналы:

$$s_1\left(g\right)=T\left(g_*\right)\left\{s\left(g\right)\right\}=s\left(gg_*\right),\ s_2\left(g\right)=s\left(g\right),$$

и задается соотношением: $\underset{l}{\chi}_{s(gg_*),s(g)}\left(g\right)=\underset{r}{\chi}_{s,s}\left(gg_*\right)$.

Доказательство. ◄ АКФ можно записать как:

$$\int_G s(g_1g_*)\overline{s(g_1g^{-1})}d_r g_1=$$

$$\int_G s(g_2^{-1}gg_*)\overline{s(g_2^{-1})}\frac{1}{\left|g_2\right|}d_r g_2=\underset{r}{\chi}_{s,s}\left(gg_*\right).$$ ► Ч.т.д.

Соотношения:

$$\underset{l}{\chi}_{s(g),s\left(g_*^{-1}g\right)}\left(g\right)=\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(gg_{_*}\right),\ \underset{l}{\chi}_{s\left(g_*^{-1}g\right),s(g)}\left(g\right)=\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(g_*^{-1}g\right)$$

$$\underset{r}{\chi}_{s(g),s(gg_*)}\left(g\right)=\underset{r}{\chi}_{s,s}\left(g_*^{-1}g\right),\ \underset{r}{\chi}_{s(gg_*),s(g)}\left(g\right)=\underset{r}{\chi}_{s,s}\left(gg_*\right)$$

можно использовать в качестве статистик для оценки параметров сигнала, так как ВКФ достигают максимума при $\underset{l}{\chi}\left(e\right)$ и $\underset{r}{\chi}\left(e\right)$. Исходя из последнего значения оцениваемых параметров $\left\{g_{_*}\right\}$ можно определить из решения уравнений $gg_{_*}=e$ и $g_*^{-1}g=e$.

7. Постоянство объема левой взаимной корреляционной функции V:

$$V=\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(g\right)\right|^2dg=\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s\left(g_*^{-1}g\right),s(g)}\left(g\right)\right|^2dg . (5)$$

Доказательство. ◄ С учетом

$\underset{l}{\chi}_{s\left(g_*^{-1}g\right),s(g)}\left(g\right)=\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(g_*^{-1}g\right)$ можно записать:

$$\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s\left(g_*^{-1}g\right),s(g)}\left(g\right)\right|^2dg=\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(g_*^{-1}g\right)\right|^2dg \cdot$$

Сделаем замену переменной $g_*^{-1}g=g_1$. Тогда $d_l\left(g_*^{-1}g\right)=d_l\left(g\right)$. Отсюда следует соотношение:

$$\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s\left(g_*^{-1}g\right),s(g)}\left(g\right)\right|^2dg=\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(g\right)\right|^2=V \cdot$$ ► Ч.т.д.

8. Постоянство объема левой взаимной корреляционной функции V:

$$V=\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(g\right)\right|^2dg=\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s(g),\frac{1}{\left|g_*\right|^{1/2}}s\left(g_*^{-1}g\right)}\left(g\right)\right|^2dg . \qquad (6)$$

Доказательство. ◄ С учетом

$\underset{l}{\chi}_{s(g),s\left(g_*^{-1}g\right)}\left(g\right)=\frac{1}{\left|g_*\right|^{1/2}}\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(gg_*\right)$ можно записать следующее соотношение:

$$\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s(g),s\left(g_*^{-1}g\right)}\left(g\right)\right|^2dg=\int_G\frac{1}{\left|g_*\right|}\left|\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(gg_*\right)\right|^2dg .$$

Сделаем замену переменной $gg_*=g_1$. Тогда $d_l\left(gg_*\right)=\frac{1}{\left|g_*\right|}d_l\left(g\right)=d_l\left(g_1\right)$. Отсюда следует:

$$\int_G\frac{1}{\left|g_*\right|}\left|\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(gg_*\right)\right|^2dg=\int_G\left|\underset{l}{\chi}_{s,s}\left(g_1\right)\right|^2dg_1=V \cdot$$ ► Ч.т.д.

9. Постоянство объема правой автокорреляционной функции V:

$$V=\int_G\left|\underset{r}{\chi}_{s,s}\left(g\right)\right|^2d_rg=\int_G\left|\underset{r}{\chi}_{s(gg_*),s(g)}\left(g\right)\right|^2d_rg \cdot$$

Доказательство. ◄ С учетом

$\underset{r}{\chi}_{s(gg_*),s(g)}\left(g\right)=\underset{r}{\chi}_{s,s}\left(gg_*\right)$ можно записать:

$$\int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s(gg_*),s(g)}(g) \right|^2 dg = \int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s,s}(gg_*) \right|^2 d_r g. \qquad (7)$$

Сделаем замену переменной $gg_* = g_1$. Тогда $d_r(gg_*) = d_r(g)$. Отсюда следует (7): $\int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s(gg_*),s(g)}(g) \right|^2 d_r g = \int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s,s}(g) \right|^2 d_r g = V$. ► Ч.т.д.

10. Постоянство объема правой автокорреляционной функции V:

$$V = \int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s,s}(g) \right|^2 d_r g = \int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s(g),\frac{1}{|g_*|^{1/2}}s\left(g_*^{-1}g\right)}(g) \right|^2 d_r g. \quad (8)$$

Доказательство. ◄ С учетом

$\underset{r}{\chi}_{s(g),\frac{1}{|g_*|^{1/2}}s\left(g_*^{-1}g\right)}(g) = \frac{1}{|g_*|_r}\chi_{s,s}\left(g_*^{-1}g\right)$ можно записать

соотношение:

$$\frac{1}{|g_*|}\int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s(g),s\left(g_*^{-1}g\right)}(g) \right|^2 dg = \frac{1}{|g_*|}\int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s,s}(g_1) \right|^2 |g_*| d_r g_1 = V.$$

Сделаем замену переменной $g_*^{-1}g = g_1$. Тогда $d_r\left(g_*^{-1}g\right) = d_r(g_1)$, $\frac{1}{|g_*|}d_r(g) = d_r(g_1)$. Отсюда

следует (8): $\int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s(gg_*),s(g)}(g) \right|^2 d_r g = \int_G \left| \underset{r}{\chi}_{s,s}(g) \right|^2 d_r g = V$.

► Ч.т.д.

При выводе свойств корреляционной функции пользовались только абстрактные понятия меры и интегрирования на группах. Это дает основание считать, что для любой локально-компактной группы можно ввести корреляционную функцию.

Случайные групповые сигналы в гидролокации

Введение случайных групповых сигналов позволяет в самом общем виде описать передачу сигналов в Мировом Океане. Цель данного пункта исследование некоммутативной природы представления случайных групповых сигналов. Для достижения достаточной общности описания физических явлений в Океане будем полагать, что исследуемые сигналы $s(g)$ заданы на локально компактной группе $g \in G$. Определим левую взаимную корреляционную функцию $\underset{l}{cr}_{1,2}\left(g_2^{-1}g_1\right)$ случайных процессов (СП) $n_1(g)$, $n_2(g)$ соотношением:

$$cl_{n1,n2}\left(g_2^{-1}g_1\right) \triangleq E\left\{n_1(g_1)\overline{n_2(g_2)}\right\}. \qquad (9)$$

Заметим, что левая взаимная корреляционная функция инвариантна относительно левых преобразований $T\{g_0\}n_1(g_1) = n_1\left(g_0^{-1}g_1\right)$:

$$E\left\{n_1\left(g_0^{-1}g_1\right)\overline{n_2\left(g_0^{-1}g_2\right)}\right\} = cl_{n1,n2}\left(g_2^{-1}g_1\right). \quad (10)$$

Соотношение (10) можно представить иначе:

$$E\left\{n_1(g_1)\overline{n_2\left(g_1g_2^{-1}\right)}\right\} = cl_{n1,n2}(g_2). \qquad (11)$$

Правую корреляционную функцию определяют выражением:

$$cr_{n1,n2}\left(g_1g_2^{-1}\right) \triangleq E\left\{n_1(g_1)\overline{n_2(g_2)}\right\}, \qquad (12)$$

где $cr_{n1,n2}\left(g_{n1}g_{n2}^{-1}\right)$ – правая взаимная корреляционная функция обобщенного стационарного случайного процесса.

Соотношение (12) можно записать иначе:

$$E\left\{n(g_1)\overline{n(g_2^{-1}g_1)}\right\} = \underset{r}{cr}_{n1,n2}(g_2). \qquad (13)$$

Рассмотрим модель формирования левой взаимной корреляционной функции для групповых процессов $n_1(g)$ и $n_2(g)$. Пусть в каналах формируют сигналы два генератора СП. Последние реализуют некоммутативные операции левой фильтрации. На рис.1 представлена операция формирование левой взаимной корреляционной функции СП $\underset{l}{cr}_{1,2}\left(g_2^{-1}g_1\right)$. Здесь $\underset{l}{*}$ – индекс левой

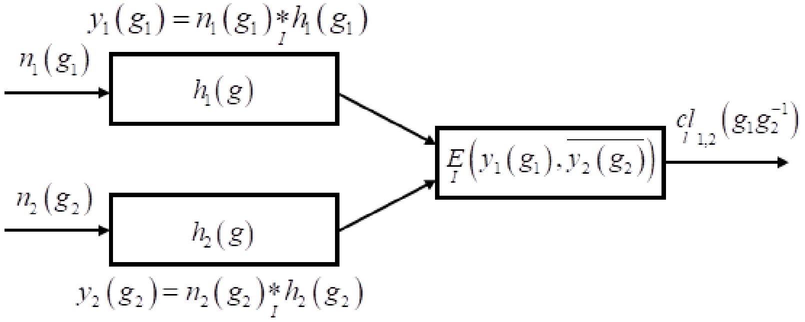

Рисунок 1 – Формирование левой взаимной корреляционной функции случайного процесса $\underset{l}{cl}_{1,2}\left(g_2^{-1}g_1\right)$. Здесь $\underset{l}{*}$ – индекс левой свертки

свертки. С выходов фильтров формируется левая взаимная КФ [1-3,4,8].

Первый и второй фильтры реализуют отклики некоммутативных левых сверток в виде следующих фунций:

$$y_1(g_*) = \int_G n_1(k_1) h_1\left(k_1^{-1} g_*\right) d_l k_1 ,$$

$$y_2\left(g_* g^{-1}\right) = \int_G n_2(k_{11}) h_2\left(k_{11}{}^{-1} g_* g^{-1}\right) d_l k_{11} .$$

$$cl_{y_1,y_2}(g) = E\left(y_1(g_*), \overline{y_2\left(g_* g^{-1}\right)}\right) =$$

$$cl_{y_1,y_2}(g) = E\left(y_1(g_*), \overline{y_2\left(g_* g^{-1}\right)}\right) =$$

$$= \int_G \int_G E\left(n_1(k_1)\overline{n_2(k_{11})}\right) h_1\left(k_1^{-1} g_*\right) \overline{h_2\left(k_{11}{}^{-1} g_* g^{-1}\right)} d_l k_1 d_l k_{11} =$$

$$= \int_G \int_G cl\left(k_{11}^{-1} \cdot k_1\right) h_1\left(k_1^{-1} g_*\right) \overline{h_2\left(k_{11}{}^{-1} g_* g^{-1}\right)} d_l k_1 d_l k_{11} ..$$

Делая замену переменной $z = k_{11}{}^{-1} k_1$, $d_l z = d_l k_1$, $r^{-1} = k_{11}{}^{-1} g_*$, $d_l r = d_l k_{11}$, $k_1^{-1} g_* = z^{-1} k_{11}^{-1} g_* = z^{-1} \cdot r^{-1}$, получим следующее выражение:

$$cl_{y1,y2}(g) = \int_G \int_G cl_{n1,n2}(z) h_1\left(z^{-1} r^{-1}\right) \overline{h_2\left(r^{-1} g^{-1}\right)} d_l z d_l r =$$

$$= \int_G \left(\int_G cl_{n1,n2}(z) h_1\left(z^{-1} r^{-1}\right) d_l z \right) \overline{\overline{h_2(gr)}} d_l r =$$

$$= \left(\overline{\overline{h_2}} \underset{l}{*} cl_{n1,n2} \underset{l}{*} h_1\right)(g), \qquad (14)$$

где $\overline{\overline{h_2}}(g) = \overline{h_2\left(g^{-1}\right)}$ – операция инвалюции сигнала;

$\underset{l}{*}$ – индекс левой свертки.

На рис.2 представлена операция формирование правой взаимной корреляционной функции СП $\underset{r}{cr}_{1,2}\left(g_2^{-1} g_1\right)$. Здесь $\underset{r}{*}$ - индекс правой свертки.

Первый и второй фильтры реализуют отклики некоммутативных правых сверток в виде следующих функций:

$$y_1(g_*) = \int_G n_1(k_1) h_1\left(g_* k_1^{-1}\right) d_r k_1 ,$$

$$y_2\left(g_* g^{-1}\right) = \int_G n_2(k_{11}) h_2\left(g^{-1} g_* k_{11}{}^{-1}\right) d_r k_{11} .$$

$$cr_{y_1,y_2}(g) = E\left(y_1(g_*), \overline{y_2\left(g^{-1} g_*\right)}\right) =$$

$$= \int_G \int_G E\left(n_1(k_1)\overline{n_2(k_{11})}\right) h_1\left(g_* k_1^{-1}\right) \overline{h_2\left(g^{-1} g_* k_{11}{}^{-1}\right)} d_l k_1 d_l k_{11} =$$

$$= \int_G \int_G cl\left(k_1 \cdot k_{11}^{-1}\right) h_1\left(g_* k_1^{-1}\right) \overline{h_2\left(g^{-1} g_* k_{11}{}^{-1}\right)} d_l k_1 d_l k_{11}.$$

Делая замену переменных

$z = k_1 k_{11}{}^{-1}$, $d_r z = d_r k_1$, $r^{-1} = g_* k_{11}{}^{-1}$, $d_r r = d_r k_{11}$, $g_* k_1^{-1} = g_* k_{11}{}^{-1} z^{-1} = r^{-1} z^{-1}$, $k_1^{-1} g_* = z^{-1} k_{11}^{-1} g_* = z^{-1} \cdot r^{-1}$, получим

$$cr_{y1,y2}(g) = \int_G \int_G cl_{n1,n2}(z) h_1\left(r^{-1} z^{-1}\right) \overline{h_2\left(g^{-1} r^{-1}\right)} d_r z d_r r =$$

$$= \int_G \left(cr_{n1,n2} \underset{r}{*} h_1\right)\left(r^{-1}\right) \overline{\overline{h_2(rg)}} d_r r = \left(\overline{\overline{h_2}} \underset{r}{*} cl_{n1,n2} \underset{r}{*} h_1\right)(g) . \qquad (15)$$

Таким образом, левая КФ между процессами $y_1(g)$, $y_2(g)$ равна левой свертке между инвалюцией второй импульсной характеристики с результатом левой свертки взаимной корреляционной функции входных процессов с групповой импульсной характепистикой первого фильтра.

Соответственно правая взаимная корреляционная функция между выходными процессами $y_1(g)$, $y_2(g)$ равна, правой свертке между инвалюцией второй импульсной характеристики фильтра с результатом свертки взаимной корреляционной функции входных процессов с групповой импульсной характепистикой первого фильтра. Соотношения (14) и (15) можно рассматривать как теоремы формирования корреляционной функции для процессов, преобразованных операциями групповой фильтрации.

Рассмотрим частный случай формирования корреляционной функции для группы сдвига A.

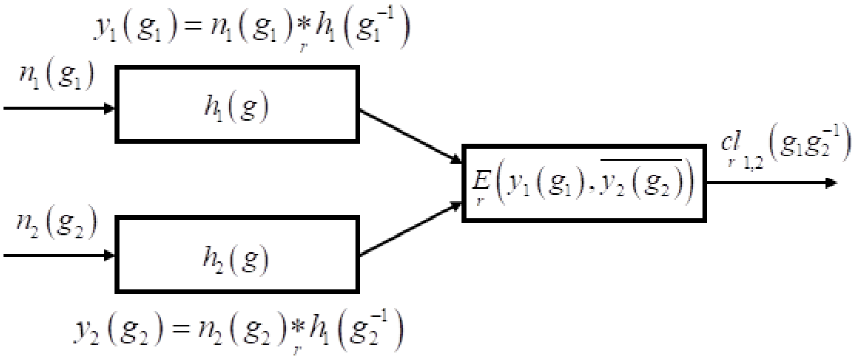

Рисунок 2 – Формирование правой взаимной корреляционной функции СП $\underset{r}{cr}_{1,2}\left(g_1 g_2^{-1}\right)$.

Поскольку группа сдвига является абелевой, ее корреляционная функция задается соотношением:

$$c_{y1,y2}\left(g\right)=c_{_{n1,n2}}*c_{h1,h2},\ c_{h1,h2}=h_1*\overline{h_2\left(-t\right)},$$

$$c_{y1,y2}\left(g\right)=c_{_{n1,n2}}*c_{h1,h2}. \qquad (16)$$

В частотной области соотношение (16) можно записать:

$$C_{y1,y2}\left(f\right)=C_{n1,n2}\left(f\right)\cdot H_1\left(f\right)\overline{H_2\left(f\right)}, \qquad (17)$$

$$C_{y1,y2}\left(f\right)=F\left\{c_{y1,y2}\left(t\right)\right\};\ C_{n1,n2}\left(f\right)=F\left\{c_{n1,n2}\left(t\right)\right\};$$

$$c_{h1,h2}=F\left\{h_1\left(t\right)\cdot\overline{h_2\left(-t\right)}\right\}=H_1\left(f\right)\cdot\overline{H_2\left(f\right)};$$

$$c_{h1,h2}=F\left\{h_1\left(t\right)\cdot\overline{h_2\left(-t\right)}\right\}=H_1\left(f\right)\cdot\overline{H_2\left(f\right)}.$$

Соотношение (17) подтверждают известный результат для стационарного процесса [2]. Для формирования модели передачи ШПС через гидроакустический канал необходимо вввести модель обобщающую модель канала с независимыми приращениями. Определим класс случайных импульсных характеристик с независимыми левыми прирощениями соотношением:

$$E\left(h\left(g_1\right)\overline{h\left(g_2\right)}\right)=r_{_{l\ h,h}}\left(g_1,g_2\right)=\Psi\left(g_1\right)\delta\left(g_1^{-1}g_2\right),(18)$$

где $\Psi\left(g_1\right)$ – сглаживающая весовая функция (функция рассеяния).

С независимыми правыми приращениями запишем:

$$E\left(h\left(g_1\right)\overline{h\left(g_2\right)}\right)=\Psi\left(g_1\right)\delta\left(g_2g_1^{-1}\right). \qquad (19)$$

Обозначим левую свертку:

$$y\left(g\right)=\int s\left(gk\right)h\left(k^{-1}\right)d_rk. \qquad (20)$$

Подсчитаем среднее значение квадрата модуля отклика фильтра (20):

$$E\left|y\left(g\right)\right|^2=\int\int s\left(gk_1\right)\overline{s\left(gk_2\right)}E\left(h\left(k_1^{-1}\right)\overline{h\left(k_2^{-1}\right)}\right)d_lk_1d_lk_2=$$

$$=\int\int s\left(gk_1\right)\overline{s\left(gk_2\right)}\Psi\left(k_1^{-1}\right)\delta\left(k_2^{-1}k_1\right)d_lk_1d_lk_2=$$

$$=\int s\left(gk_1\right)\overline{s\left(gk_1\right)}\Psi\left(k_1^{-1}\right)d_lk_1=$$

$$=\int\left|s\left(gk_1\right)\right|^2\Psi\left(k_1^{-1}\right)d_lk_1=\left|s\left(g\right)\right|^2\underset{l}{*}\Psi\left(g\right) \quad (21)$$

Для правой свертки запишем:

$$y\left(g\right)=\int s\left(kg\right)h\left(k^{-1}\right)d_rk,$$

$$E\left|y\left(g\right)\right|^2=\int\int s\left(k_1g\right)\overline{s\left(k_2g\right)}E\left(h\left(k_1^{-1}\right)\overline{h\left(k_2^{-1}\right)}\right)d_rk_1d_rk_2=$$

$$=\int\int s\left(k_1g\right)\overline{s\left(k_2g\right)}\Psi\left(k_1^{-1}\right)\delta\left(k_2k_1^{-1}\right)d_rk_1d_rk_2=$$

$$=\int s\left(k_1g\right)\overline{s\left(k_1g\right)}\Psi\left(k_1^{-1}\right)d_rk_1=$$

$$=\int\left|s\left(k_1g\right)\right|^2\Psi\left(k_1^{-1}\right)d_rk_1=\left|s\left(g\right)\right|^2\underset{r}{*}\Psi\left(g\right) \quad (22)$$

Соотношения (21), (22) являются базовыми при оценке влияния канала на широкополосные сигналы. Действительно, как видно из указанных соотношений (21), (22) влияние канала можно оценить левым (правым) сглаживанием с весовой функцией $\Psi\left(g\right)$.

Подводный звуковой канал (ПЗК) при принятии гипотезы однородности и стационарности его функций не позволяет достаточно точно описывать преобразование сигналов. Решение проблемы достигается применением для представления сигналов в канале методов теории групп. Расширение свойств канала за счет введения априорное знание о параметрах групп преобразований, позволил выбрать соответствующие операции свертки. На основе этих операций введено понятие взаимной корреляционной функции широкополосной функции неопределенности сигналов.

Математическая модель гидроакустического канала

Для реализации точки зрения на представления физического явления, при котором аддитивно-мультипликативные преобразования рассматриваются как единый объект AM, вводится понятие масштабно-временного сигнала, являющегося частным случаем группового сигнала. Для реализации точки зрения на представления физического явления, при котором аддитивно-мультипликативные преобразования рассматриваются как единый объект AM, вводится понятие масштабно-временного сигнала, являющегося частным случаем группового сигнала [1-7]. Для представления временного сигнала в масштабно-временную форму определяют операцию:

$$\Gamma_h\left(s(t)\right)\triangleq s_h(g)=s(\alpha,t)=$$

$$=\sqrt{\alpha}\int_0^\infty S(\omega)\cdot H(\alpha\omega)\exp\left(-i\omega t\right)d\omega, \qquad (23)$$

где $\Gamma_h\left(s(t)\right)$ – оператор группового перехода,

$H(f)$ – передаточная характеристика системы формирования.

Функцию на группе AM $s_h\left(g\left(\Delta,t\right)\right)=s(g)$, называют масштабно-временным сигналом. Поскольку группа A является нормальным делителем группы G, то при определении масштабно-временного сигнала оператор его формирования выбирают из условия его инвариантности относительно группы A.

Другой вариант реализации оператора группового представления можно получить, если положить:

$$\Gamma_h\left(s(t)\right) \triangleq s_h(g)(\alpha,t) =$$

$$= \int_0^\infty S(\omega)\cdot H(\alpha\omega)\exp\left(-i\omega t\right)\frac{d\omega}{\omega}, \qquad (24)$$

В сравнении с оператором группового перехода (23) оператор (24) задан интегральным соотношением с мерой $\frac{d\omega}{\omega}$, инвариантной относительно преобразования сжатия (расширения). Представление масштабно-временного сигнала в виде (24) имеет определенные преимущества перед представлением (23), т.к. для случая (24) упрощаются аналитические выкладки выбора нормирующего множителя. Однако в форме (24) в литературе вейвлет–представления не рассматриваются. Отличие интегрального оператора (24) от оператора – (23) использование логарифмической меры $\frac{d\omega}{\omega} = d\left(\ln\omega\right)$ вместо меры $d\omega$.

С учетом понятия группового сигнала оператор $T\left(g\right)$ задается левое регулярное представление группы G сдвигами ($g_0 \equiv g\left(\alpha_0,\tau_0\right)$):

$$T\left(g_0\right)s(g) = s\left(g_0^{-1}g\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_0}}\int_0^\infty S(\omega)\overline{H\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\omega\right)}\exp\left[-i\omega\left(\frac{t-\tau_0}{\alpha_0}\right)\right]d\omega, \qquad (25)$$

Покажем, что операторы Γ_h и $T\left(g_0\right)$ коммутативны $\Gamma_h T\left(g_0\right) = T\left(g_0\right)\Gamma_h$.

Это следует из последовательности применения операций:

$$\Gamma_h T\left(g_0\right)s(t) = \Gamma_h\frac{1}{\sqrt{\alpha}}s\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_0}}\int_0^\infty S(\omega)\overline{H\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\omega\right)}\exp\left(-i\omega\frac{t-\tau}{\alpha}\right)d\varpi = T\left(g_0\right)\Gamma_h s(t). \qquad (26)$$

Свойство перестановочности играет важную роль в теории масштабно-временных сигналов, т.к. оно устанавливает гомоморфизм пространства сигналов на пространство групповых сигналов. При этом сохраняется действие оператора $T(g)$ (действие операции сдвига и сжатия (расширения)).

Представление сигнала в виде (23) или (24) соответствует распространению временного сигнала в масштабно-временную полуплоскость (α,t), т.е. групповой сигнал записывается как функция двух переменных. Полуплоскость $-\infty < t < \infty$, $\alpha > 0$ называют обобщенной временной плоскостью, в которой параметр t можно интерпретировать как время, а параметр α – как масштаб времени. Преимущество представления сигналов в обобщенной временной плоскости заключается в том, что сигнал теперь можно задать в виде функции $s\left(g\right)$ на группе и физические эффекты описать не в терминах группы преобразований времени, а в виде функций на самой группе AM, рассматриваемой как группа сдвигов. Оператор формирования группового сигнала имеет обратный оператор, что соответствует представлению для естественной меры:

$$\Gamma_h^{-1}\left(s\left(\alpha_1,t\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty s\left(\alpha_1,t_1\right)\overline{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}h\left(\frac{t_1-t}{\alpha_1}\right)}\frac{d\alpha_1}{\alpha_1{}^2}dt_1. \qquad (27)$$

и для логарифмической меры

$$\Gamma_h^{-1}\left(s\left(\alpha,t\right)\right) = \frac{1}{C_1}\int_0^\infty\int_0^\infty s_1\left(\alpha,\tau\right)\overline{h\left(\frac{\tau-t}{\alpha}\right)}\frac{d\alpha}{\alpha^3}d\tau,$$

$$C_1 = \int_0^\infty\left|H(\alpha)\right|^2\frac{d\alpha}{\alpha^2}\cdot$$

Можно показать, что норма группового сигнала $\left\|s\left(\alpha,t\right)\right\|$ равна

$$\left\|s\left(\alpha,t\right)\right\| = \sqrt{\int_0^\infty\int_0^\infty\left|S(\omega_1)\right|^2\left|H(\alpha\omega_1)\right|^2 d\omega_1\frac{d\alpha}{\alpha}} =$$

$$= \sqrt{EA_S\cdot EM_H}\,, \qquad (28)$$

где $EA_S = \int_0^\infty\left|S(\omega_1)\right|^2 d\omega_1$, $EM_H = \int_0^\infty\left|H(\alpha)\right|^2\frac{d\alpha}{\alpha}$ – квадраты нормы сигнала передаточной характеристики для естественной и логарифмической меры.

Заметим, что входной сигнал рассматривается относительно естественной меры, в то время как передаточная характеристика сигнала – относительно логарифмической меры. Масштбно-временной сигнал для импульсной характеристики $h(\alpha,t) = \exp\left(i\omega_m\ln\left(\alpha\right)\right)\exp\left(i\omega_0 t\right)$ можно записать:

$$\Phi_s\left(h\right)(g) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty s(\alpha_1,t_1)\exp\left(i\omega_m\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)\right)\exp\left(i\omega_0\left(\frac{\left(t-t_1\right)}{\sigma_1}\right)\right)\frac{d\alpha_1 dt_1}{\alpha_1^2} =$$

$$= \exp\left(i\omega_m\ln\left(\alpha\right)\right)\int_0^\infty S\left(\alpha_1,\frac{\omega_0}{\alpha_1}\right)\exp\left(i\omega_0\frac{t}{\alpha_1}\right)\exp\left(i\omega_m\ln\left(\alpha_1\right)\right)\frac{d\alpha_1}{\alpha_1^2} \qquad (29)$$

Обратное преобразование Фурье здесь является операцией интегрирования по частотам Фурье ω_0 и Меллина ω_m. Действительно, интегрированием по частотам восстановим групповой сигнал:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\omega_m\ln(\alpha)\right)\int_0^{\infty}S\left(\alpha,\frac{\omega_0}{\alpha}\right)\exp\left(i\omega_0\frac{t}{\omega_1}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-i\omega_m\ln(\omega_1)\right)\frac{d\alpha}{\alpha^2}d\omega_m d\omega_0=s(\alpha,t)$$

Подставляя в (23) одну из форм представления масштабно-временного сигнала, получим:

$$\int_0^{\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}S_1(\omega_1)H_1(\alpha_1\omega_1)S_2(\omega_2)H_2\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\omega_2\right)\delta\left(\omega_1-\frac{\omega_2}{\alpha_1}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-i\omega_2\frac{t}{\alpha_1}\right)\frac{d\alpha_1}{\alpha_1^2}d\omega_1 d\omega_2=$$

$$=\int_0^{\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}S_2(\omega_2)S_1(x)H_1(\omega_2)H_2(\alpha x)\exp(-ixt)dx\frac{d\omega_2}{\omega_2}=$$

$$=\int_0^{\infty}S_2(\omega_2)H_1(\omega_2)\frac{d\omega_2}{\omega_2}\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}S_1(x)H_2(\alpha x)\cdot$$

$$\cdot\exp(-ixt)dx=C_0s_3(\alpha,t), \qquad (30)$$

где $s_3(\alpha,t)=\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}S_1(x)H_2(\alpha x)\exp(-ixt)dx$ –масштабно-временной сигнал, $C_0=\int_0^{\infty}S_2(\omega_2)H_1(\omega_2)\frac{d\omega_2}{\omega_2}$.

Как видно результатом свертки является также масштабно-временной сигнал. При этом спектральная функция входного сигнала $S_1(f)$ совпадает со спектральной функцией входного временным сигналом $s_1(\alpha,t)$, а передаточная характеристика $\sqrt{\alpha}H_2(\alpha\omega)$ – с передаточной характеристикой сигнала $s_2(\alpha,t)$. Новый сигнал имеет постоянный множитель, равный

$$C_0=\int_0^{\infty}S_2(\omega_2)H_1(\omega_2)\frac{d\omega_2}{\omega_2}\ .$$

Константа C_0 является скалярным произведением функций $S_2(\omega_2),H_1(\omega_2)$ относительно логарифмической меры. Указанное скалярное произведение является мерой схожести функций относительно меры $\frac{d\omega}{\omega}$.

Нетрудно видеть, что сигнал $\delta(\omega,t)$ исполняет роль единицы в сверточной алгебре масштабно-временных сигналов относительно левой меры и имеет площадь под интегралом равную $\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\delta\left(\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)\right)\delta\left(\frac{t_1-t}{\omega}\right)\frac{d\omega_1}{\omega_1{}^2}dt_1=1$.

Для групповых сигналов левая взаимная корреляционная функция может быть записана в следующем виде:

$$rl_{s1,s2}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}s_1(\omega_1,t_1)\overline{s_2\left(\frac{\omega_1}{\omega},\frac{t_1-t}{\omega}\right)}\frac{d\omega_1 dt_1}{\omega_1{}^2}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}s_1(\alpha\alpha_1,\alpha t_1+t)\overline{s_2(\alpha_1,t_1)}\frac{d\alpha_1 dt_1}{\alpha_1{}^2}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}s_1\left(\frac{\alpha}{\alpha_1},t-\frac{\alpha\cdot t_1}{\alpha_1}\right)\overline{s_2\left(\frac{1}{\alpha_1},-\frac{t_1}{\alpha_1}\right)}\frac{d\alpha_1 dt_1}{\alpha_1}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}s_1\left(\frac{1}{\alpha_1},-\frac{t_1}{\alpha_1}\right)\overline{s_2\left(\frac{1}{\alpha\alpha_1},-\frac{t_1}{\alpha\alpha_1}-\frac{t}{\alpha}\right)}\frac{d\alpha_1 dt_1}{\alpha_1}\ .$$

Распишем взаимную КФ в явном виде для МВС:

$$rl_{s1,s2}(g)=\left(s_1(g)*\overline{s_2(g^{-1})}\right)=$$

$$=\int_G s_1(g_1)\overline{s_2(g^{-1}g_1)}d_lg=\int_G s_1(gg_1)\overline{s_2(g_1)}d_lg_1=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}S_1(\omega_1)\overline{H_1(\alpha\alpha_1 f_1)}\exp\left(-i\omega_1(\alpha t_1+t)\right)\overline{S_2(\omega_2)}\cdot$$

$$\cdot H_2(\alpha_1\omega_2)\exp\left(i\omega_2(t_1)\right)\frac{d\alpha_1}{\alpha_1}dt_1d\omega_1d\omega_2=$$

$$=\int_0^{\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}S_1(\omega_1)\overline{H_1(\alpha\alpha_1\omega_1)}\overline{S_2(\omega_2)}H_2(\alpha_1\omega_2)\delta(\alpha\omega_1-\omega_2)\cdot$$

$$\cdot\exp(-i\omega_1t)\frac{d\alpha_1}{\alpha_1}d\omega_1d\omega_2=$$

$$=\int_0^{\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}S\overline{_2(\alpha\omega_1)}S_1(\omega_1)\overline{H_1(\alpha\alpha_1\omega_1)}H_2(\alpha\alpha_1\omega_2)\cdot$$

$$\cdot\exp(-i\omega_1t)\frac{d\alpha_1}{\alpha_1}df_1=$$

$$=\int_0^{\infty}\overline{H_1(x)}H_2(x)\frac{dx}{x}\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}S_1(x)\overline{S_2(\alpha x)}\cdot$$

$$\cdot\exp(-ixt)dx=C_1s_3(\alpha,t)\ , \qquad (32)$$

где $s_3(\alpha,t)=\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}S_1(x)\overline{S_2(\alpha x)}\exp(-ixt)dx$ – групповой сигнал.

Как видно, левая взаимная КФ масштабно-временных сигналов с точностью до множителя $C_1=\int_0^{\infty}\overline{H_1(x)}H_2(x)\frac{dx}{x}$ равна МВС вида

$$s_3(\alpha,t)=\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}S_1(x)\overline{S_2(\alpha x)}\exp(-ixt)dx. \qquad (33)$$

В инженерной практике широкое применение находит АКФ временных сигналов. Для МВС указанный аналог имеет вид:

$$s(\alpha,t)*\overline{s\left(\frac{1}{\alpha},-\frac{t}{\alpha}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}S(\omega_1)H(\alpha_1f_1)\exp(-i\omega_1t)\overline{S(f_2)H\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\omega_2\right)}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(i\omega_2\left(\frac{t_1-t}{\alpha}\right)\right)d\omega_1d\omega\frac{d\alpha_1}{\alpha_1^2}dt_1=$$

$$=\int_0^\infty \left|H(x)\right|^2 \frac{dx}{x}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty S\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\overline{S(\omega)}\exp\left(-i2\pi f\frac{t}{\omega}\right)d\omega=$$

$$=C_4\sqrt{\alpha}\int_0^\infty S(\omega)\overline{S(\alpha\omega)}\exp(-i\omega t)d\omega \quad . \qquad (34)$$

Заметим, что функция

$$\sqrt{\alpha}\int_0^\infty S(\omega)\overline{S(\alpha\omega)}\exp(-i\omega t)d\omega$$

также является масштабно-временным сигналом, а энергия равна

$$E_h=\int_0^\infty \left|H(\omega_1)\right|^2\frac{d\omega_1}{\omega_1}=C_4\,.$$

В теории обработки сигналов масштабно-временных сигналов функцию

$$rl_{s,s}(g)=\sqrt{\alpha}\int_0^\infty S(\omega)\overline{S(\alpha\omega)}\exp(-i\omega t)d\omega\,.$$

называют широкополосной функцией отклика сигналов, а выражение:

$$\Xi l(\alpha,t)=\left|\sqrt{\alpha}\int_0^\infty S(\omega)\overline{S(\alpha\omega)}\exp(-i\omega t)d\omega\right|^2$$

широкополосной функцией неопределенности. Необходимо заметить, что не выяснена групповая природа широкополосных сигналов, а также не определен факт некоммутативности базовой операции.

Вычислим квадрат нормы (энергию) масштабно-временного сигнала:

$$\int_G \left|s(g)\right|^2 d_l g=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}\begin{matrix}\sqrt{\alpha}\int_0^\infty S(\omega_1)\overline{S(\alpha\omega_1)}\exp(i\omega t)\overline{S(\omega_2)}\cdot\\ \cdot S(\alpha\omega_2)\exp(-i\omega_2 t)d\omega_1 d\omega_2\end{matrix}\frac{d\alpha}{\alpha^2}dt=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\left|S(\omega_1)\right|^2\left|S(\alpha\omega_1)\right|^2 d\omega_1\frac{d\alpha}{\sigma}=EA_S\cdot EM_S\,,\ (35)$$

где $EA_S=\int_0^\infty\left|S(\omega_1)\right|^2 d\omega_1$ – норма сигнала в частотной области по аддитивной мере (аддитивная энергия);

$EM_S=\int_0^\infty\left|S(\alpha\omega_1)\right|^2\frac{d\omega}{\omega}$ – норма сигнала в частотной области по мультипликативной мере (мультипликативная энергия).

Энергетический спектр масштабно-временного сигнала (МВС) запишем как преобразование Фурье от автокорреляционной функции. Известно, что корреляционная функция масштабно-временного сигнала задается правилом

$$\left(s(g)*\overline{s(g^{-1})}\right)=C\cdot r_{SS}(\alpha,t)\,, \qquad (36)$$

где $r_{SS}(\alpha,t)=\sqrt{\alpha}\int_0^\infty S(x)\overline{S(\alpha x)}\exp(ixt)dx$ – широкополосная функция отклика сигналов, $S=F\{s\}$.

Применим к выражению (36) преобразование Фурье:

$$\Phi_{\overline{s(g)*s(g^{-1})}}(h)(g)=C\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}r_{SS}(\alpha_1,t_1)\exp\left(i\omega_m\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\Big)\exp\left(i\omega_0\left(\frac{t-t_1}{\alpha_1}\right)\right)\frac{d\alpha_1 dt_1}{\alpha_1^2}=$$

$$=C\cdot\frac{\overline{S(\omega_0)}}{\sqrt{\omega_0}}\exp\left(i\omega_m\ln\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)\right)\int_0^\infty\sqrt{\frac{1}{z}}S(z)\cdot$$

$$\cdot\exp(i\omega_m\ln(z))\exp(izt)dz=$$

$$=C\cdot\frac{\overline{S(\omega_0)}}{\sqrt{\omega_0}}\exp\left(i\omega_m\ln\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)\right)F^{-1}\left\{1_+(\omega)S(z)z^{i\omega_m-\frac{1}{2}}\right\}(-t)$$

(37)

Точно так же можно представить правую ВКФ для МВС

$$rr_{ss}(g)=\overline{s_2(g^{-1})}\underset{l}{*}s_1(g)=s_1(g)\underset{r}{*}\overline{s_2(g^{-1})}=$$

$$=\int_G s_1(g_1g)\overline{s_2(g_1)}d_r g_1=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}\int_0^\infty\int_0^\infty\sqrt{\alpha_1\alpha}\sqrt{\alpha_1}\int_0^\infty S(f_1)\overline{S_2(f_2)}\,\overline{H_1(\alpha_1\alpha f_1)}H_2(\alpha_1\mu\omega_2)\cdot\\ \cdot\exp(-i\omega_1(\alpha_1 t+t_1))\exp(i2\pi f_2 t)\cdot df_1 df_2\frac{d\Delta_1}{\Delta_1}dt_1=\end{matrix}$$

$$=\int_0^\infty S_1(\omega_1)\overline{S_2(\omega_1)}\sqrt{\alpha}\int_0^\infty\overline{H_1(\alpha\alpha_1\omega_1)}H_2(\alpha_1\omega_1)\cdot$$

$$\cdot\exp(-i\omega_1\alpha_1 t)d(\omega_1\alpha_1)\frac{d\omega_1}{\omega_1}=$$

$$=\int_0^\infty S(\omega_1)\overline{S(\omega_1)}\sqrt{\alpha}\int_0^\infty\overline{H_1(\alpha_1\omega)}H_2(\omega_1)\exp(-i\omega_1 t)d(\omega_1)\frac{d\omega_1}{\omega_1}=$$

$$=\sqrt{\alpha}\int_0^\infty H_2(\omega_1)\overline{H_1(\alpha\omega_1)}\exp(-i\omega_1 t)d\omega_1\cdot\int_0^\infty S_1(\omega)\overline{S_2(\omega)}\omega$$

(38)

Как видно, правая корреляционная функция МВС не зависит от корреляционных свойств первых сигналов и определяется корреляционными свойствами импульсной (частотной) характеристикой оператора формирования группового сигнала. КФ зависит также от корреляции спектральных характеристик сигналов относительно логарифмической меры $\int_0^\infty S_1(\omega)\overline{S_2(\omega)}\frac{d\omega}{\omega}$.

Для описания канала необходимо определить масштабно-временной СП. Заметим, что все свойства группового СП, будут справедливы и для масштабно-временного процесса, который является частным случаем группового процесса. Левая КФ обобщенно-стационарного масштабно-временного СП имеет вид:

$$\underset{l}{r}\left(g_0{}^{-1}g_1\right)=\underset{l}{r}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0},\frac{t_1-t_0}{\alpha_0}\right). \qquad (39)$$

Правая корреляционная функция обобщенно стационарного сигнала в масштабно-временной плоскости имеет представление: $\underset{r}{r}\left(g_1g_0\right)=\underset{l}{r}\left(\alpha_1\Delta_0,\alpha_1t_0+t_1\right)$.

Далее, рассмотрим случайный МВС: $r_{lyy}\left(\alpha,t\right)=r_{lxx}\left(\alpha,t\right)\underset{l}{*}\underset{r}{\Xi}\left(\alpha,t\right)$,

где $\underset{r}{\Xi}\left(\alpha,t\right)=h\left(\alpha,t\right)\underset{r}{*}\overline{h^{-1}\left(\alpha,t\right)}$ – правая КФ импульсной характеристикию.

С учетом (40) и, полагая $r_{lxx}(\alpha,t)=\delta(\alpha,t)$, запишем

$$r_{lyy}\left(\alpha,t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\delta(\alpha_1,t_1)\Xi_r\left(\frac{\alpha}{\alpha_1},\frac{(t-t_1)}{\alpha_1}\right)\frac{d\alpha_1dt_1}{\alpha_1{}^2}=\Xi_r\left(\alpha,t\right).$$

Таким образом, подавая на вход системы «белый» шум с корреляционной функцией $\delta(\alpha,t)=\delta\left(\ln\left(\alpha\right)\right)\delta\left(t\right)$, на выходе системы сформируем процесс с корреляционной функцией $\Xi_r\left(\alpha,t\right)$. Заметим, что в классе МВС отсутствует функция $\delta(\alpha,t)$. Тем не менее, построим аналог СП «близкого» к «белому» шуму.

Зададим случайный процесс в форме гармонического представления:

$$n\left(t,\alpha\right)=\int_0^{\infty}N\left(\omega\right)H_s\left(\alpha\omega\right)\exp\left(-i\omega t\right)d\eta\left(\omega\right) \qquad (40)$$

Здесь стохастическая мера определяется условием:

$$E\left\{d\eta\left(\omega_1\right)\overline{d\eta\left(\omega_2\right)}\right\}=\frac{\delta\left(\omega_1-\omega_2\right)}{\omega_1}d\omega_1d\omega_2. \qquad (41)$$

С учетом (40) корреляционная функция процесса будет иметь вид:

$$E\left\{n\left(t_1,\Delta\right)\overline{n\left(t_2,\alpha\right)}\right\}=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\begin{matrix}N\left(\omega_1\right)\overline{N\left(\omega_2\right)}H_0\left(\alpha\omega_1\right)\overline{H_0\left(\alpha\omega_2\right)}\cdot\\ \cdot\exp\left(-i\left(\omega_1t_1-\omega_2t_2\right)\right)d\eta\left(\omega_1\right)\overline{d\eta\left(\omega_2\right)}\end{matrix}=$$

$$=\int_0^{\infty}\left|N\left(\omega\right)\right|^2\left|H_0\left(\alpha\omega\right)\right|^2\exp\left(-i\omega\left(t_1-t_2\right)\right)\frac{d\omega}{\omega}. \qquad (42)$$

Рассмотрим случай когда $\left|N\left(f\right)\right|^2=C$, где C - константа. Тогда соотношение (42) перепишется:

$$E\left\{n\left(t_1,\alpha\right)\overline{n\left(t_2,\alpha\right)}\right\}=C\int_0^{\infty}\left|H_0\left(z\right)\right|^2\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-i\omega\frac{\left(t_1-t_2\right)}{\alpha}\right)\frac{d\omega}{\omega}=r_{hh}\left(\frac{\left(t_1-t_2\right)}{\alpha}\right).$$

С учетом $r_{hh}\left(0\right)=\int_0^{\infty}\left|H_0\left(\omega\right)\right|^2\frac{d\omega}{\omega}=1$ получим, что мощность процесса равна $P=C$. Видно, что $\lim\limits_{\Delta\to0}r_{hh}\left(\frac{t}{\alpha}\right)\to\delta\left(t\right)$ при уменьшении масштаба α масштабно-временная КФ стремится к $\delta\left(t\right)$ – функции, т.е. по временной координате, СП

$$n\left(t,\alpha\right)=\sqrt{C}\int_0^{\infty}H_0\left(\alpha\omega\right)\exp\left(-i\omega t\right)d\eta\left(\omega\right)$$

является аналогом «белого» шума. Из условия (44) также следует, что КФ случайного МВС также является МВС. Мощность случайного МВС равна интегралу от произведения $\left|N\left(\omega\right)\right|^2\left|H_0\left(\omega\right)\right|^2$: $r\left(0,1\right)=\int_0^{\infty}\left|N\left(\omega\right)\right|^2\left|H_0\left(\omega\right)\right|^2\frac{d\omega}{\omega}$.

Сформированный процесс инвариантен относительно группы AM. Введенный двухпараметрический стационарный процесс обобщает известные модели однопараметрических процессов.

Обработка сигналов, согласованная с их симметрией

Как было показано выше при теоретико-групповом подходе процесс согласования алгоритма обработки гидроакустических сигналов сводится к определению алгоритмов, инвариантных относительно выделенных преобразований. В данном пункте статьи рассмотрим класс однопараметрических групп преобразований, что позволит перейти от операторного представления к функциональному и получить конструктиввные выражения для оптимального приемника.

Для решения задачи обнаружения сигналов с известными характеристиками оптимальным приемником является согласованный фильтр (СФ) или коррелятор. Специфика обнаружения сигналов в условиях преобразований аргумента требует обобщения понятия СФ на случай симметрий сигнала отличных от сдвиговой. Для произвольной однопараметрической группы преобразования (ОГП) времени $L\left(t\right)$ определяем свертку [4, 5, 8]:

$$s_1\left(t\right)\underset{G}{*}h\left(t\right)=\int s_1\left(\tau\right)h\left[L\left(t\right)-L\left(\tau\right)\right]\xi^{-1}\left(\tau\right)d\tau. \qquad (43)$$

где $\xi\left(t\right)$ – оператор инфинитезимального преобразования, устанавливающий изоморфизм между однопораметрическими подгрупами и подгруппой сдвигов времени.

Свертка (43) является частным случаем обобщенной свертки (2). В работах [4-8] показано, что для $g\in G$ временное и спектральное представление сигнала для произвольной ОГП имеет вид:

$$\begin{cases} S_g(\omega)=\int\limits_G s(t)e^{i\omega\int\xi^{-1}(t)dt}\xi^{-1}(t)dt. \\ s(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega)e^{-i\omega\int\xi^{-1}(t)dt}d\omega. \end{cases} \qquad (44)$$

Инвариантный базис на произвольной однопараметрической непрерывной группе преобразований составляют функции вида: $\exp\left\{i\omega\int\xi^{-1}(t)dt\right\}$, являющихся неприводимыми представлениями однопараметрической группы G. На основании (44), используя обычную методику построения СФ [10], легко получить выражение для коэффициента передачи. Действительно, отклик на полезный сигнал равен:

$$s_2(T)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)H_g(\omega)\exp\left[i\omega\int\limits_T\xi^{-1}(\tau)d\tau\right]d\omega.$$

При отсутствии сигнала, отклик на помеху с энергетическим спектром $N_g(\omega)$ определяется выражением:

$$\sigma^2=\frac{1}{2\pi}\int N_g(\omega)\left|H_g(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Отношение сигнал/помеха на выходе СФ находится из формулы:

$$d_T=\frac{s_2(T)}{|\sigma|}=\frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)H_g^*(\omega)\exp\left[i\omega\int\limits_T\xi^{-1}(\tau)d\tau\right]d\omega}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} N_g(\omega)\left|H_g(\omega)\right|^2 d\omega}}.$$

Полагая спектры $S_g(\omega)$ и $H_g(\omega)$ комплекснозначными, на основании неравенства Коши-Буняковского, получим $\max(d_T)$:

$$d=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|S_g(\omega)\right|^2}{H_g(\omega)}d\omega},$$

при $H_g(\omega)=const\dfrac{S_g^*(\omega)}{N_g(\omega)}\exp\left[-i\omega\int\limits_T\xi^{-1}(\tau)d\tau\right].$

Фильтры, описываемые последним выражением, являются линейными нестационарными в привычном аддитивном масштабе времени, так как их параметры должны меняться во времени. Они обеспечивают максимальное отношение сигнал-помеха на выходе, и инвариантны относительно преобразований времени, задаваемых инфинитезимальным оператором $\xi(t)$.

Выводы

1. Процесс влияния океанической среды на гидроакустический приводит к аддитивно-мультипликативному преобразованию сигнала, которое можно описать некоммутативной линейной группой преобразований.
2. Для выделенной группы преобразований наиболее «естественным» является представление в базисе неприводимых представлений, так как в этом случае параметр преобразования представляется в виде сдвига.
3. Симметрия представления сигналов и средств обработки должна быть согласована с видом преобразования сигнала, так как это обеспечивает его минимальное представление, и как следствие, минимальные вычислительные и емкостные затраты.
4. Соответствие между симметриями сигнала и средствами его обработки вытекает из принципа дуальности математических моделей сигнала и системы.
5. Построение и выделение групп преобразований необходимо проводить на основе анализа физических явлений, сопутствующих распространению сигнала и пространственно-временным разнесением, а также взаимной кинематикой объектов излучения и приема гидроакустических колебаний.

Список литературы

1. *Сапрыкин А.В.* Корреляционный анализ групповых сигналов // Военная радиоэлектроника: Опыт использования и проблемы, подготовка специалистов: материалы XV Межвузовской научно-технической конференции. – Петродворец: ВМИРЭ, 2004. – с. 270-271.

2. *Сапрыкин В.А.* Радиотехнические цепи и сигналы ч.2, – Петродворец: ВМИРЭ, 2008. – 452 с.

3. *Сапрыкин А.В.* Применение масштабно-когерентной функции для оценки сигналов гидроакустического объекта // Военная радиоэлектроника: Опыт использования и проблемы, подготовка специалистов: материалы XV Межвузовской научно-технической конференции. – Петродворец: ВМИРЭ, 2002. – С.111.

4. *Бутырский Е.Ю.* Функция неопределенности на группе преобразований // Информация и космос. – 2008. – № 3. – С. 31–39.

5. *Бутырский Е.Ю.* Модели систем и сигналов, индуцированные преобразованием времени // Научное приборостроение. – 2011. – Т.21. – № 1. – С. 128–135.

6. *Бутырский Е.Ю.* Основные понятия теории систем и сигналов на группах преобразований // Информация и космос. – 2007. – № 3. – С. 67–80.

7. *Бутырский Е.Ю.* Взвешенное преобразование Гильберта и его свойства // Информация и космос. – 2008. – № 2. – С. 40–46.

8. *Бутырский Е.Ю.* Математические модели гидроакустических сигналов и методы их обработки. – СПб.: Стратегия будущего. 2018. – 650 с.

9. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований математической физики. – М.: Наука, 1983. – 280 с.

10. *Варакин Л.Е.* Теория сложных сигналов. – М.: Сов. радио, 1970. – 375с.

Статья поступила в редакцию 16 октября 2021 г.
Принята к публикации 12 декабря 2021 г.

Ссылка для цитирования: Бутырский Е.Ю., Сапрыкин А.В., Яковлев А.И. Групповые модели сигналов и влияние среды // Национальная безопасность и стратегическое планирование. 2021. № 4(36). С. 20-32. DOI: https://doi.org/10.37468/2307-1400-2021-4-20-32

Сведения об авторах:

БУТЫРСКИЙ ЕВГЕНИЙ ЮРЬЕВИЧ – *доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета, г. Санкт-Петербург*
e-mail: evgenira88@mail.ru

САПРЫКИН АЛЕКСЕЙ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ – *доктор тенических наук, доцент кафедры гидроакустики, Военно-морской политехнический институт Военного учебно-научного центра ВМФ «Военно-морская академия имени Адмирала Флота Советского Союза Н.Г. Кузнецова» (ВМПИ ВУНЦ ВМФ ВМА), г. Санкт–Петербург*
e-mail: sapr@dervil.ru

ЯКОВЛЕВ АЛЕКСЕЙ ИВАНОВИЧ – *кандидат тенических наук, доцент кафедры радиоэлектроники, Военно-морской политехнический институт Военного учебно-научного центра ВМФ «Военно-морская академия имени Адмирала Флота Советского Союза Н.Г. Кузнецова» (ВМПИ ВУНЦ ВМФ ВМА), г. Санкт–Петербург*
e-mail: Aleksej_yakovlev@mail.ru