

БУТЫРСКИЙ ЕВГЕНИЙ ЮРЬЕВИЧ,  
РАХУБА ВИТАЛИЙ ПАВЛОВИЧ

## ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ СВОЙСТВА

### АННОТАЦИЯ

В настоящей статье в целях обеспечения скрытности и безопасности функционирования активных локационных средств предлагается новый подход к синтезу сигналов, которые позволяют повысить эффективность средств освещения обстановки. В работе проведена классификация сложных широкополосных сигналов, рассмотрен класс полигармонических и полосовых сигналов, их достоинства и недостатки, перспективы применения в системах локации, показана взаимосвязь их сигналов с гиперболической функцией и обобщенным рядом Фибоначчи.

Ключевые слова: безопасность, скрытность, классификация, широкополосный сигнал, система, обнаружение, полигармонический сигнал, гипербола.

BUTYRSKIY E. YU.,  
RAKHUBA V. P.

## POLYHARMONIC SIGNALS AND THEIR PROPERTIES

### ABSTRACT

This article proposes a new approach to signal synthesis to ensure the stealth and safety of active location tools, which improves the efficiency of lighting. The work has been classified complex broadband signals, considered the class of polyharmonic and band signals, their pros and cons, the prospects of application in the systems of location, shows the relationship of their signals with hyperbolic function and generalized range Fibonacci.

**Keywords:** security, stealth, classification, broadband signal, system, detection, polyharmonic signal, hyperbole.

### Введение

В настоящее время отношения между Россией и странами НАТО достигли апогея. Началась новая фаза гонки вооружений. Современное вооружение во многом определяется состоянием радиоэлектронных технических средств. К ним относятся средства связи и управления, радиолокации и гидроакустики, телеметрия и т.д. Но в любом случае информационная составляющая этих средств целиком и полностью определяется типами сигналов, которые они используют и которые являются носителем информации. Таким образом эффективность решения поставленных задач перед радиоэлектронным средством зависит от класса используемых сигналов. В частности, от вида сигнала зависят качество связи, дальность, разрешающие способности по различным параметрам, вероятности обнаружения, качество управления, скрытность и т.д. В статье рассматриваются сигналы, которые используются в активной радиолокации и гидролокации.

В настоящее время в системах наблюдения за объектами, как радиолокации, так и в гидроакустике все чаще используются широкополосные

и сложные сигналы. Это связано с тем, что они позволяют:

- получить хорошую разрешающую способность по скорости и по координатам;
- реализовать эффективные алгоритмы обработки сигналов в условиях помех и, в частности, реверберационной помехи;
- в условиях противодействия противника их сложнее подавить;
- иметь высокую степень скрытности.

Известно большое число различных ШПС, свойства которых нашли отражение во многих книгах и журнальных статьях.

ШПС подразделяются на следующие виды [1,2]:

- частотно-модулированные сигналы;
- многочастотные (МЧС) сигналы;
- фазоманипулированные сигналы (сигналы с кодовой фазовой модуляцией);
- дискретные частотные сигналы (сигналы с кодовой частотной модуляцией, частотно-манипулированные сигналы);
- дискретные составные частотные (составные сигналы с кодовой частотной модуляцией);

- комбинированные сигналы, включающие в себя комбинации вышеперечисленных сигналов.

Необходимо отметить, что в каждом из выделенных классов сигналов существует множество подклассов. Причем количество видов сигналов с каждым годом становится все больше. Это объясняется все возрастающими требованиями к перспективным ГАС и РЛС, а также расширением класса решаемых задач при повышенных требованиях помехоустойчивости, разрешаемой способности по координатам, скорости и скрытности.

### 1. Полигармонические сигналы и их свойства

Особым классом широкополосных сигналов является многочастотный сигнал (МЧС) (он же полигармонический), представляющий собой совокупность нескольких сигналов с различными несущими частотами и одинаковыми или разными законами модуляции. Сигналы этого класса имеют достаточно хорошие перспективы применения не только в связи, но и в задачах обнаружения радиолокационных и гидроакустических сигналов, что связано с простотой их генерации, повышенной скрытностью и возможностью формирования сигнала в частотной области. Формирование многочастотного сигнала происходит излучением нескольких сигналов с различными несущими частотами одновременно или со смещением во времени за счет быстрой перестройки несущей частоты зондирующего сигнала. Как правило, МЧС представляют собой сумму из  $N$  гармоник  $U_1(t) \dots U_N(t)$  амплитуды и фазы которых определяются в соответствии с законами формирования сигналов [1-4]. Многочастотные (полигармонические) сигналы являются одним из перспективных направлений в радиолокации и гидроакустике.

В целом необходимо отметить, что в настоящее время все методы синтеза сигнала в основном ориентируются на временной подход. В частности, синтез частотно-модулированных сигналов (ЧМС) основан на задании функции модуляции во временном представлении. Спектральное представление является лишь следствием этого подхода. Например, КЧМ-сигнал (квадратно частотно-

модулированный сигнал) теоретически имеет очень хорошую функцию неопределенности, но его спектральная плотность имеет вид далекий от идеала [1]. При этом оптимальные системы обработки ЧМС достаточно сложны в реализации.

Полигармонические сигналы (ПГС) имеют дискретный спектр, а во времени состоят из гармонических компонент, которые достаточно просто представляются в цифровом виде, так как имеют постоянный период и в следствие этого постоянный интервал дискретизации. Для частотно-модулированных сигналов дискретизация с постоянным интервалом дискретизации будет избыточной, так как надо ориентироваться на верхнюю частоту спектра. Дискретизация с переменным шагом значительно усложняет систему обработки. Поэтому полигармонические сигналы в этом отношении более перспективны. С другой стороны, используя принцип двойственности полигармонический сигнал легко можно преобразовать в полосовой, что позволяет получить сигналы с почти идеальным телом неопределенности. Поэтому одним из магистральных путей развития теории синтеза сигналов состоит в аккумуляции свойств полигармонических сигналов и псевдослучайных последовательностей.

**Принцип дуальности.** Известно, что любой сигнал может быть представлен во временной и спектральной области. Причем спектральное представление неоднозначно, в том смысле, что определяются выбором базисных функций. Критерием оптимального спектрального представления является системный принцип минимального описания, сущность которого сводится следующему: описание оптимально, если без потери информации оно требует наименьшее число базисных функций. Тот или иной набор базисных функций диктуется типом симметрии сигнала. Например, для узкополосных сигналов деформация комплексного спектра Фурье в условиях эффекта Доплера, может быть описана в виде аддитивного сдвига (аддитивная симметрия) и ограничивается набором гармонических функций. Собственной функцией является комплексная экспонента. Для широкополосных сигналов симметрия имеет вид аддитивно-

мультипликативного преобразования (сдвиг и сжатие), которое соотносится аффинной группой, где нормальной подгруппой является аддитивная группа (сдвигов), а факторгруппа изоморфна мультипликативной (гиперболической) (сжатия) группе. Таким образом, для учета эффекта Доплера более адекватным является спектр Меллина, а собственной функцией является мультипликативная экспонента [5,6].

Принцип дуальности состоит в том, что любая теорема, сформулированная во временной области, имеет аналог в спектральной области. Типичный пример теорема Парсевала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega.$$

Таким образом, основной подход к формированию сигналов, который открывает определенное направление в области теории и применения сложных широкополосных сигналов, является принцип дуальности. В соответствии с этим синтез сигналов изначально будет строиться исходя из спектрального представления. Исходя из принципа дуальности можно ввести «альтернативную теорию» сигналов где, к примеру, возможно построить M-последовательность в спектральной области. Такой сигнал будет представлять собой полигармонический сигнал, у которого спектральные компоненты образуют M-последовательность. При этом появляется дополнительная возможность независимо варьировать, для обеспечения необходимых свойств сигнала, фазовым спектром. Кроме этого повышается скрытность сигнала. В связи с этим, большой интерес представляет класс полигармонических сигналов, которые представляют собой совокупность гармонических компонент с известным частотным расстоянием между гармониками. Необходимо отметить, что в настоящее время не до конца используются полезные свойства в структуре полигармонического сигнала (ПГС). Здесь можно указать несколько важных фактов:

- полигармонический сигнал, как правило, рассматривается как совокупность отдельных компонент, а не как единое целое, где проявляются системные свойства;

- полагают, что сигнал состоит из отдельных компонент одинаковой длительности (поэтому отдельные компоненты имеют разный коэффициент узкополосности (разную «добротность»);
- в основном полагается, что компоненты ПГС расположены через равные частотные интервалы;
- не учитывается группа преобразований сжатия для сложных широкополосных сигналов, ответственность за которую «несет» эффект Доплера, являющийся следствием кинематики объекта локации;
- существует определенная аналогия между случайным процессом, отраженным от объекта локации, представленным рядом Карунена-Лоэва и полигармоническим сигналом со случайными коэффициентами.

Как известно, амплитуда отраженного от цели сигнала зависит от целого ряда факторов, в том числе, и от эффективной площади рассеяния объекта. Для соотношений между используемыми в радиолокации (аналогично и в гидроакустике) длинами волн и размерами типовых целей эффективная площадь рассеяния цели является достаточно сильно осциллирующей величиной. Такой эффект вызывает сильную флюктуацию амплитуды отраженного сигнала, что приводит к уменьшению требуемого отношения «сигнал-помеха» (ОСП), а это отрицательно сказывается на характеристиках радиолокатора, таких, как дальность обнаружения цели и точность измерения ее координат.

Отрицательное влияние флюктуации отраженных сигналов на характеристики РЛС может быть устранено или, по крайней мере, уменьшено, если удастся каким-либо образом добиться их сглаживания. Одним из способов сглаживания флюктуации является применение многочастотных сигналов [5]. Физическая сущность эффекта сглаживания флюктуации отраженного сигнала при облучении цели многочастотным сигналом состоит в том, что при достаточно большом разnose несущих частот ширина лепестков диаграмм вторичного излучения цели на различных частотах не одинакова, а соответствующие экстремальные точки диаграмм

оказываются сдвинутыми друг относительно друга, благодаря чему уменьшается изрезанность эквивалентной диаграммы вторичного излучения цели и соответственно относительная величина флуктуации отраженного сигнала. При этом наибольший эффект сглаживания флуктуации достигается при статистической независимости отраженных от цели сигналов на каждой из составляющих частот [5].

Полигармонические сигналы, представляют собой совокупность гармонических компонент с известным частотным расстоянием между гармониками и произвольными значениями амплитуд  $A_i$  и фаз  $\varphi_i$ . Формальное определение ПГС дается следующим выражением:

$$s(t) = \sum_{i=0}^N [a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)] = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t - \varphi_i).$$

Для понимания структуры полигармонического сигнала рассматривается такой показатель как отношение узкополосности сигнала в целом, как единого целого, и его отдельной компоненты.

Необходимо отметить, что возможны два основных варианта суммирования компонент полигармонического сигнала:

1. Компоненты суммируются при условии, что коэффициент узкополосности для каждой компоненты (дискретности) будет константой, т.е.  $\forall i \in N \rightarrow \gamma_i = const$ . Нетрудно показать, что это эквивалентно условию постоянства числа степеней свободы для каждой компоненты, т.е.  $N_c = const$ . При этом длительность каждой компоненты будет различной, т.е.  $\forall i, j (i \neq j) \in N \rightarrow T_i \neq T_j$ . В этом случае, разрешающая способность по каждой компоненте будет также величиной постоянной. В этом смысле такой подход можно определить, как «равнодобротный».

2. Каждая компонента имеет одинаковую длительность –  $T = const$ . При этом коэффициент узкополосности  $\gamma_i$  каждой компоненты будет различным, т.е.  $\forall i, j (i \neq j) \in N \rightarrow \gamma_i \neq \gamma_j$ .

Причем коэффициент узкополосности надо понимать точки зрения теоретико-группового подхода. Для каждой группы преобразований времени (носителя сигнала)  $\gamma_i$  он определяется

индивидуально. В частности, вследствие эффекта Доплера, наиболее важными являются аддитивная и мультипликативная группы преобразований времени [6,7].

Таким образом, коэффициент узкополосности вводится, исходя из:

- аддитивной трактовки;
- мультипликативной трактовки.

Кроме того, компоненты полигармонического сигнала можно формировать следующими способами:

- компоненты ПГС имеют постоянную длительность ( $T = const$ );
- компоненты ПГС имеют постоянное число степеней свободы (число периодов) ( $N = const$ );
- комбинация вышеперечисленных способов ( $T = const$  и  $N = const$ ).

**2. Аддитивная трактовка расстановки компонент полигармонического сигнала**

Аддитивная трактовка расстановки компонент ПГС основана на преобразовании:  $g(\omega): \omega \rightarrow \omega + \Omega$  или  $g(f): f \rightarrow f + F$ , где  $\Omega, F$  – параметры преобразования ( $\omega = 2\pi f$ ,  $\omega$  и  $f$  – соответственно циклическая и линейная частота).

В соответствии с общепризнанным определением отношения узкополосности можно записать:

$$k_i = 2 \frac{f_{i+1} - f_i}{f_{i+1} + f_i} = \frac{\Delta f_i}{f_0}, \quad k_i - \text{коэффициент узкополосности.} \tag{1}$$

Потребуем также, чтобы для каждой компоненты полигармонического сигнала удовлетворялось отношение

$$k_i = k = const. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что (2) соответствует ПГС у которого компоненты расставлены в соответствии с условием  $N = const$ . В этом несложно убедиться проведя следующие преобразования:

$$k_i = k = \frac{\Delta f_0}{f_0} = \left( \frac{T_0}{\Delta t_0} \right)^{-1} = (N)^{-1} \Rightarrow N = const.$$

Определим последнее соотношение как «условие равнодобротности».

Найдем число компонент полигармонического

сигнала, который занимает некоторую частотную полосу. Имеем:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_0 + \frac{\Delta f_0 + \Delta f_1}{2} = f_0 + \frac{kf_0 + kf_1}{2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2f_1 = 2f_0 + kf_0 + kf_1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f_1(2 - k) = f_0(2 + k) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow f_1 = f_0 \left( \frac{2+k}{2-k} \right) = f_0(1+k).
 \end{aligned}$$

Далее нетрудно получить:

$$f_{i+1} = f_i(1+k) = f_0(1+k)^i. \quad (3)$$

В последнем соотношении учитывался тот факт, что  $k \ll 1$  (каждая отдельная компонента является узкополосным сигналом).

Если провести экспонирование частотной оси нетрудно получить изоморфизм между мультипликативным представлением «равнооборотного» носителя сигнала и аддитивным:

$$\begin{aligned}
 \exp\{\ln(f_i)\} &= \exp\left\{\ln\left[f_0(1+k)^i\right]\right\} = \\
 &= \exp\{\ln(f_0) + i \ln(1+k)\}.
 \end{aligned}$$

Далее положим:  $fm_0 = \ln(f_0)$ ,  $fm_i = \ln(f_i)$ ,  $\ln(1+k) = \Omega m$ .

В результате получим:  $fm_i = fm_0 + i\Omega m$ .

Таким образом, в экспоненциальной шкале зависимость частоты отдельной компоненты ПГС является линейной функцией от номера дискреты. Последнее является следствием изоморфизма между мультипликативным и аддитивным преобразованиями. Для полосы частот отдельной компоненты при условии  $k \ll 1$  нетрудно получить следующее выражение [7]:

$$\Delta f_i = \Delta f_0 \left( \frac{2+k}{2-k} \right)^i \approx \Delta f_0(1+k)^i. \quad (4)$$

Для полос частот в экспоненциальном масштабе, также, как и для частот отдельных компонент ПГС получим соотношения между текущей дискретой и ее номером:  $\Delta fm_i = \Delta fm_0 + i\Omega m$ ,  $\Delta fm_0 = \ln(\Delta f_0)$ ,  $\Delta fm_i = \ln(\Delta f_i)$ ,  $\ln(1+k) = \Omega m$ .

Иллюстрация зависимостей частоты компоненты и ширины полосы показана на рис.1. Графики показывают монотонное возрастание и частоты компоненты ПГС и соответствующих спектральных полос. Что в целом подтверждает, тот факт, что чем шире спектр полигармонического сигнала, тем больше компонент он содержит.

Положим, задана полоса  $\Delta F$ , тогда используя формулу вычисления геометрической прогрессии и учитывая, что  $k \ll 1$ ,  $\Delta f_0 = kf_0$  получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \Delta F &= \sum_{i=0}^N \Delta f_i = \Delta f_0 \sum_{i=0}^N (1+k)^i = \\
 &= \frac{\Delta f_0 \left[ (1+k)^{N+1} - 1 \right]}{k} \Rightarrow (1+k)^{N+1} = \frac{k\Delta F}{\Delta f_0} + 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:  $(1+k)^{N+1} = \frac{k\Delta F}{\Delta f_0} + 1$ .

Далее логарифмируя, нетрудно получить (с учетом  $\Delta f_0 = kf_0$ ):

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{\ln\left[\frac{k\Delta F}{\Delta f_0} + 1\right]}{k} - 1 \approx \frac{\ln\left[\frac{\Delta F}{f_0} + 1\right]}{k} \Rightarrow \\
 N &\approx \frac{\ln\left[\frac{\Delta F}{f_0} + 1\right]}{k}.
 \end{aligned}$$

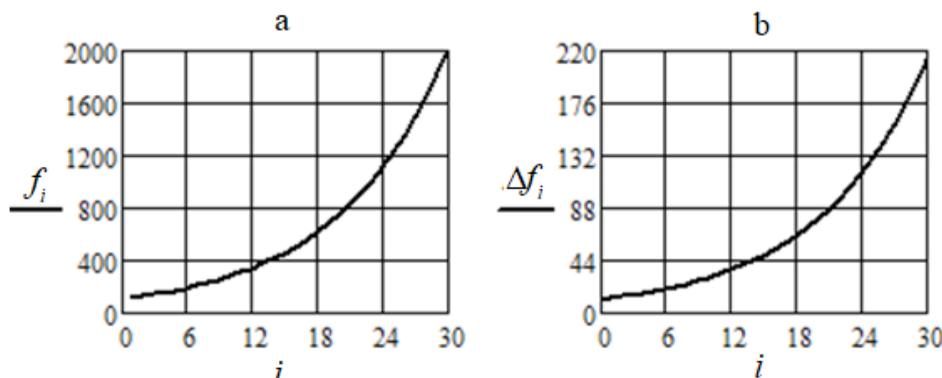


Рисунок 1

- a) – Зависимость частоты компоненты от его номера  $i$ .
- b) – Зависимость ширины полосы компоненты от ее номера  $i$ .

К примеру, если  $\Delta F = 2000$  Гц,  $f_0 = 100$  Гц,  $k = 0.1$ , то число компонент полигармонического сигнала будет равно  $N \approx 37$ . На рис.2а представлена зависимость числа компонент полигармонического сигнала от показателя узкополосности при тех же значениях полосы  $\Delta F$  и нулевой частоты  $f_0$ . Из поведения графика видно, что увеличением коэффициента узкополосности число компонент уменьшается. Оно и понятно, чем шире компонента ПГС тем меньше их поместится в заданной полосе. На рис.2б показана зависимость  $N(\Delta F)$ . С ростом  $\Delta F$  число компонент монотонно возрастает. При этом  $f_0 = 100$  и  $k = 0.1$ .

Следует отметить, что условие  $k_i = k = const$  означает, что длительности каждой из компонент ПС будут различными. Это следует из того факта, что число степеней свободы каждой из компонент будет одинаковы. Например, если число степеней свободы каждой из компонент равно  $n$ , то, исходя из теоремы Котельникова о дискретизации конкретно гармонического непрерывного сигнала, с ростом  $f$  интервал дискретизации  $\Delta t = 1/2f$  уменьшается.

Увеличиваем частоту в два раза, интервал дискретизации уменьшится в два раза. Так как  $T = n \cdot \Delta t$ , то соответственно уменьшится и длительность сигнала  $T$ . В соответствии с теоремой Котельникова число степеней свободы гармонического сигнала в два раза больше числа его периодов, поэтому длительность сигнала при постоянстве  $n$  будет меняться. Временное представление полигармонического сигнала, стоящего из 4-х гармоник показано на рис.3.

На рис.4. приведена иллюстрация модуля комплексного спектра полигармонического сигнала, состоящего из 4-х гармоник.

Условия моделирования: число отсчетов 1024; число степеней свободы 30; база выполнения БПФ (быстрого преобразования Фурье) – 512.

В целом, анализ моделирования показывает, что с увеличением числа компонентов они становятся все ближе друг к другу, а ПГС все больше во временном представлении становится похожим на гиперболический сигнал. Следовательно, и его свойства также приближаются к свойствам гипер-

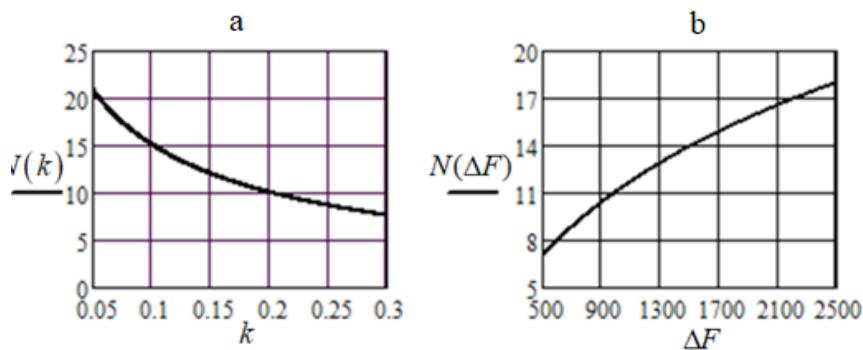


Рисунок 2

а) – Зависимость числа компонент  $N$  ПГС от показателя узкополосности  $k$

б) – Зависимость числа компонент  $N$  ПГС от ширины спектра  $\Delta F$

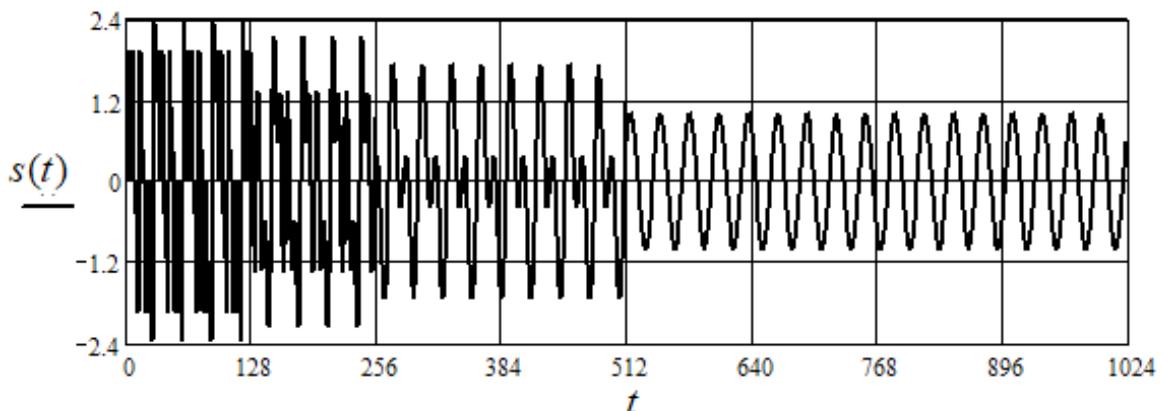


Рисунок 3 – Временное представление полигармонического сигнала состоящего из 4-х гармоник

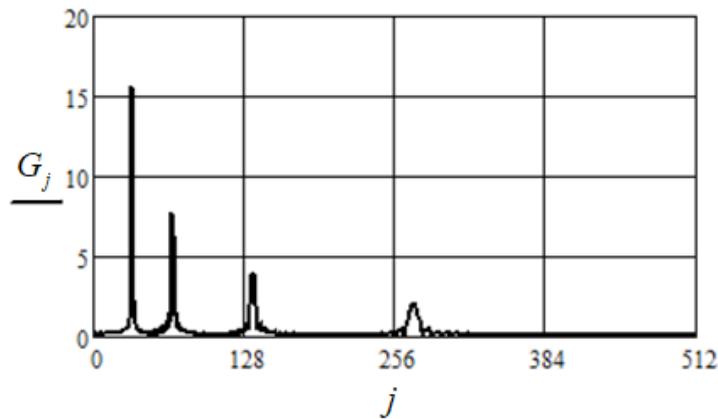


Рисунок 4 – Модуль комплексного спектра полигармонического сигнала состоящий из 4-х гармоник

болического сигнала. Таким образом, можно записать при  $N = const$  :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t - \varphi_i) \right\} \rightarrow B \frac{\sin[\omega \ln(t)]}{\sqrt{t}},$$

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad B = F(A_i, \omega_i).$$

Таким образом, суммирование компонент ПГС приводит к сигналу, который является аппроксимацией гиперболического сигнала.

При этом надо отметить, что:

- генерация полигармонического сигнала проще, чем, к примеру, гиперболического или любого другого типа сложных сигналов;
- варьируя началом генерации и амплитудой каждой из компонент можно получить достаточно сложные по своей структуре сигналы, обладающие требуемыми качествами;
- амплитудный и фазовый спектры можно описывать с помощью векторов чисел, а не функций, что значительно упрощает анализ полигармонических сигналов;
- представляется перспективным применение ПГС при реализации адаптивных методов обработки сигналов.

### 3. Мультипликативная трактовка расстановки компонент полигармонического сигнала

Определение узкополосности сигнала зависит от группы преобразований относительно которых он с точностью до фазы инвариантен.

Рассмотрим класс сигналов, у которых показатель узкополосности определяется следующим выражением:

$$k_{mi} = 2 \frac{\ln(f_{i+1}) - \ln(f_i)}{\ln(f_{i+1}) + \ln(f_i)} = 2 \frac{\ln\left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\right)}{\ln(f_i f_{i+1})} =$$

$$= \frac{\Delta f_{mi}}{f_{m0i}} = k_m = const, \quad k_m < 1, \quad (5)$$

где  $f_{mi}$ ,  $\Delta f_{mi}$  – мультипликативная частота и полоса частот гиперболического сигнала соответственно.

Такое определение узкополосности можно задать на классе мультипликативных или гиперболических сигналов [6,7,9].

Далее из выражения (5) получим:

$$k_m \ln(f_{i+1}) + k_m \ln(f_i) = 2 \ln(f_{i+1}) - 2 \ln(f_i),$$

$$(2 - k_m) \ln(f_{i+1}) = (2 + k_m) \ln(f_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(f_{i+1}) = \left( \frac{2 + k_m}{2 - k_m} \right) \ln(f_i) = (1 + k_m) \ln(f_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{i+1} = f_i^{\frac{2+k_m}{2-k_m}} = f_i^{1+k_m} = f_i \cdot f_i^{k_m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\right) = k_m \ln(f_i).$$

Из последних соотношений следует, что

$$f_{i+1} = f_i^{1+k_m} \Rightarrow f_i = f_0^{(1+k_m)^i}. \quad (6)$$

В работе [6] введено преобразование времени вида:

$$g(\alpha, \beta) : t \rightarrow \alpha t^{1+\beta}. \quad (7)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры связанные со скоростью и ускорением объекта локации и носителя

$$\text{РЛС (или ГАС)} \left( \alpha = 1 + \frac{2v_p}{C}, \quad \beta = \frac{v_p^2 T}{R_0 C} \right);$$

$R_0$  – расстояние до объекта локации в момент времени  $t = 0$   
 $v_p, v_T$  – радиальная и тангенциальная компоненты скорости объекта;  
 $C, T$  – скорость распространения колебаний и длительность сигнала.

Изоморфное представление приводит к линейному преобразованию:

$$t \rightarrow \alpha t^{1+\beta} \xrightarrow{\ln(\cdot)} (1+\beta) \ln t + \ln \alpha \Rightarrow \alpha' t' + \tau'. \quad (8)$$

$$t' = \ln t, \alpha' = 1 + \beta, \tau' = \ln \alpha.$$

Представление (7) реализуется в пространстве скорость-ускорение и в точности соответствует линейному преобразованию времени в пространстве дальность-скорость, т.е.:

$$g(\alpha', \tau') : t' \rightarrow \alpha' t' + \tau' \Leftrightarrow g(\alpha, \tau) : t \rightarrow \alpha t + \tau.$$

В частотной области можно ввести аналогичные соотношения используя теорему о сжатии преобразования Фурье:  $F\{s(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ .

На основании теоремы о сжатии можно записать соотношения, которые вытекают из разложения в ряд Маклорена относительно времени  $t = 0$  доплеровского параметра  $\alpha(t)$ :

$$\alpha(t) = \alpha t + \beta t^2 \Rightarrow g_t(\alpha, \beta) : t \rightarrow \alpha t^{1+\beta}.$$

Аналогичное преобразование можно получить и в области спектра:

$$g_t(\alpha, \beta) : t \rightarrow \alpha t^{1+\beta} \xleftrightarrow[F^{-1}\{\cdot\}]{F\{\cdot\}} g_\omega(\alpha, \beta) : \omega \rightarrow \frac{1}{\alpha} \omega^{1-\beta}.$$

Полученное соответствие получено при условии  $\beta \ll 1$ .

Таким образом, выражение (6), которое связывает частотные компоненты ПГС по гиперболическому закону тесно связано с преобразованием времени (7), которое является двухпараметрической группой преобразований изоморфной линейной группе.

Рассмотрим, как связаны между собой общая полоса ПГС с полосами отдельных компонент в мультипликативном представлении. Обозначим общую полосу сигнала  $\Delta F_m$ , как:

$$\Delta F_m = \sum_i^N k \ln(f_i) = k \sum_i^N \ln(f_i) = k \ln\left(\prod_i^N f_i\right) \Rightarrow$$

$$\Delta F_m = k \ln\left(\prod_i^N f_i\right) \Rightarrow k \ln(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_N) =$$

$$= k \ln\left(f_1 \cdot f_1^{1+k} \cdot f_1^{(1+k)^2} \cdot \dots \cdot f_1^{(1+k)^N}\right) =$$

$$= k \ln f_1^{1+(1+k)+\dots+(1+k)^N} \Rightarrow$$

$$\Delta F_m = \left(1 + (1+k) + \dots + (1+k)^N\right) \ln(f_1) =$$

$$= k \frac{(1+k)^{N+1} - 1}{(1+k) - 1} \ln(f_1) = \left[(1+k)^{N+1} - 1\right] \ln(f_1).$$

Положим  $n = \frac{1}{k}$ , тогда получим:

$$\Delta F_m \approx \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot \frac{N+1}{n}} - 1\right] \ln(f_1) \approx$$

$$\approx \left[\exp\left(\frac{N+1}{n}\right) - 1\right] \ln(f_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta F_m}{\ln(f_1)}\right)}{k} - 1 \approx \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta F_m}{\ln(f_1)}\right)}{k}. \quad (9)$$

К примеру, при  $f_1 = 100$ ,  $\Delta F_m = 1000$ ,  $k = 0.1$  получим  $N \approx 30$ .

Таким образом, число мультипликативных компонент равно 30. Под мультипликативной компонентой будем понимать гиперболическую гармонику. Таким образом, можно ввести класс полигармонических мультипликативных сигналов. В целом, можно видеть, что такие сигналы обладают всеми свойствами гиперболических сигналов, но при этом будут обладать хорошим разрешением по скорости и ускорению цели, чем гиперболический сигнал «похвастать» не может. Сложные мультипликативные сигналы позволяют получить хорошее разрешение и по дальности, что делает исследования в этом направлении перспективными.

**Полосовые сигналы.** Полигармонические сигналы порождают класс полосовых сигналов. Этот вывод можно получить если рассматривать интервалы между отдельными гармониками, как носитель сигнала. На рис.5 в качестве примера представлен полигармонический сигнал  $G_k$  состоящий из пяти гармоник и полосовой сигнал  $GP_k$ , полученный инверсией исходного ПГС.

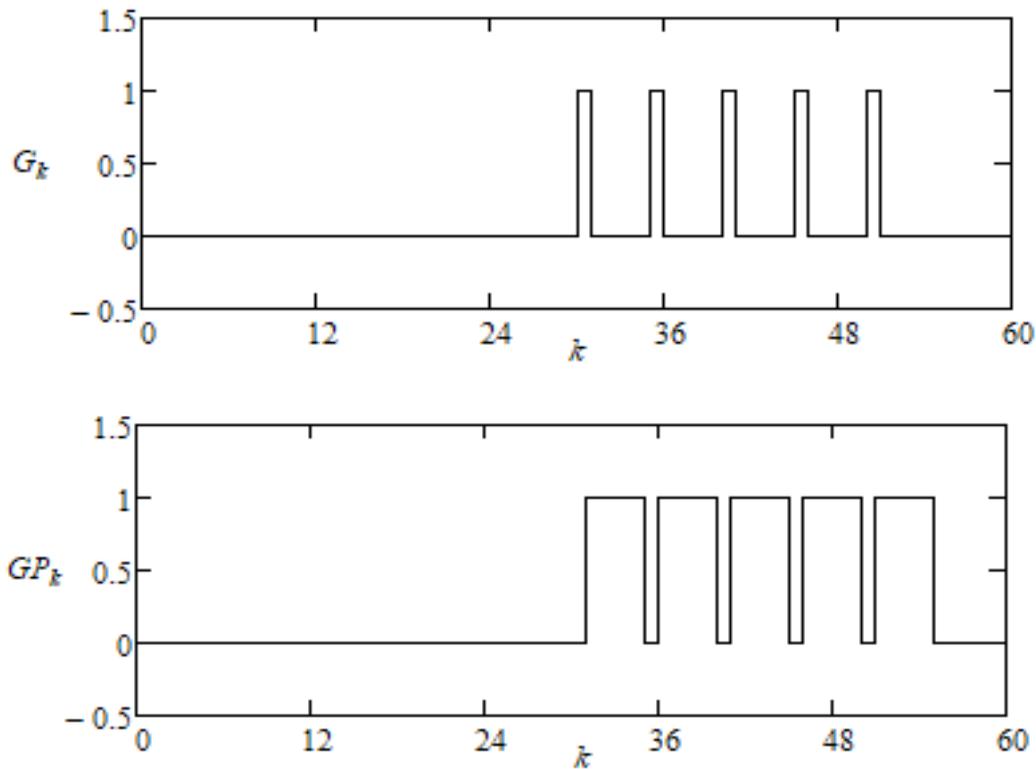


Рисунок 5 – Полигармонический сигнал  $G_k$  и полосовой сигнал  $GP_k$

**4. Геометрический подход к разбиению частотной оси полигармонического сигнала**

Рассмотрим геометрический подход к расстановке компонент ПГС. Как будет показано ниже в этом случае наиболее ярко проявляется связь между ПГС и гиперболической трактовкой. Пусть  $S_i$  – площади фигуры  $\frac{1}{f}$  на отрезке  $[f_i, f_{i+1}]$ . Положим  $S_i = S = const$ . Тогда имеет место следующая теорема [9].

**Теорема 1.** Для полигармонического сигнала, у которого на всем частотном диапазоне соблюдается условие «равнодобротности» для всех частот  $f_i$  ( $k = const$ ), имеет место равенство  $k = S$ .

Доказательство. ◀ Площадь фигуры  $S_i$  можно найти по следующе формуле (рис.6):

$$S_i = \int_{f_i}^{f_{i+1}} \frac{1}{f} df = \ln\left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\right), \quad S = \text{константа.} \quad (10)$$

Найдем связь, между частотами используя формулу (10)

$$f_{i+1} = f_i \cdot \exp\{S\}. \quad (11)$$

Разность частот определяется выражением:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i = f_i \cdot \exp\{S\} - f_i.$$

Коэффициент узкополосности равен

$$k = \frac{f_i \cdot \exp\{S\} - f_i}{\sqrt{f_{i+1}f_i}} = \frac{f_i \cdot \exp\{S\} - f_i}{\sqrt{f_i \cdot \exp\{S\} f_i}} = \frac{\exp\{S\} - 1}{\exp\left\{\frac{S}{2}\right\}} = \exp\left\{\frac{S}{2}\right\} - \exp\left\{-\frac{S}{2}\right\} = 2sh\left(\frac{S}{2}\right).$$

$$k = 2sh\left(\frac{S}{2}\right); \quad sh\left(\frac{S}{2}\right) - \text{гиперболический синус;}$$

Учитывая, что величина  $S$  значительно меньше 1,  $S \ll 1$ , так как число каналов  $N$  должно быть большим и, применяя замечательный предел  $\ln[1+x] \approx x$ , при  $S \ll 1$  получаем соотношение  $k = S$ .

Таким образом, условие  $k = const$  связано с равенством площадей под гиперболической кривой соотношением (11). Что и требовалось доказать. ▶

Определим число каналов  $N$ . Для этого надо найти общую полосу полигармонического сигнала  $\Delta F_m$ :

$$\begin{aligned} \Delta F_m &= \sum_i^N \Delta f_i = \sum_i^N (f_{i+1} - f_i) = \\ &= \sum_i^N (f_i \cdot \exp\{S\} - f_i) = (e^S - 1) \sum_i^N f_i = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (e^S - 1)(f_1 + f_1 \cdot e^S + f_1 \cdot e^{2S} + f_1 \cdot e^{3S} + \dots \\
 &\dots + f_1 \cdot e^{3S}) = (e^S - 1)f_1(1 + e^S + e^{2S} + e^{3S} + \dots \\
 &\dots + e^{NS}) = (e^S - 1)f_1 \frac{e^{S(N+1)} - 1}{e^S - 1}.
 \end{aligned}$$

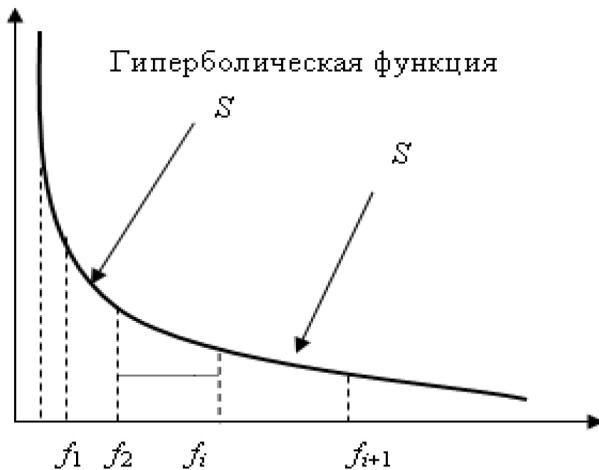


Рисунок 6. Гиперболическая иллюстрация расстановки компонент ПС

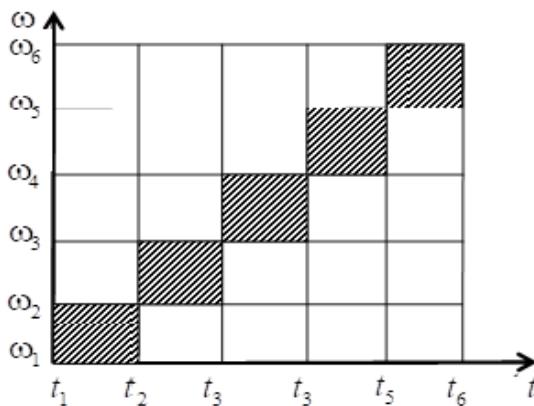
Далее используя  $\ln[1+x] \approx x$ , при  $\delta \ll 1$  нетрудно получить:

$$N \approx \frac{1}{k} \ln \left( 1 + \frac{\Delta Fm}{f_1} \right), \quad S = k. \quad (12)$$

К примеру, при  $f_1 = 100$ ,  $\Delta Fm = 1000$ ,  $k = 0.1$  получим  $N \approx 48$ .

Как видно, число каналов при одних и тех же начальных условиях несколько отличаются друг от друга. Это связано с тем, что определения узкополосности различаются между собой для разных классов сигналов.

Временное представление полигармони-



ческого сигнала показывает, что с увеличением числа компонентов они становятся все ближе друг к другу, а ПГС все больше во временном представлении становится похожим на гиперболический сигнал. Следовательно, и его свойства также приближаются к свойствам гиперболического сигнала [7]. Графически сигналы в частотно-временной области при условии, что  $T = const$  и  $N = const$  показаны на рис.7.

### 5. Полигармонические сигналы и обобщенный ряд Фибоначчи

В науке, искусстве широкое использование получили рекуррентные числовые последовательности чисел Фибоначчи, Люка и др. Они же, как простейшие числовые последовательности, более всего исследованы. В последние годы на основе последовательности Фибоначчи были также исследованы обобщенные числовые последовательности [9,11-14].

Числа обобщенных числовых последовательностей формируются по рекуррентному соотношению:  $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$

В зависимости от значения начальных чисел  $G_1$  и  $G_2$ , соотношение  $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$  порождает бесконечное множество частных числовых последовательностей, в том числе, последовательности Фибоначчи

$(G_1 = F_1 = 1, G_2 = F_2 = 1_2)$  и  $(G_1 = F_1 = 1, G_2 = F_2 = 1_2)$  последовательности Люка

$(G_1 = L_1 = 1, G_2 = L_2 = 3)$  и  $(G_1 = L_1 = 2, G_2 = L_2 = 1)$  и др.

Если обозначить  $G_1 = p$ ,  $G_2 = q$ , то обобщенная числовая последовательность примет следующий вид:

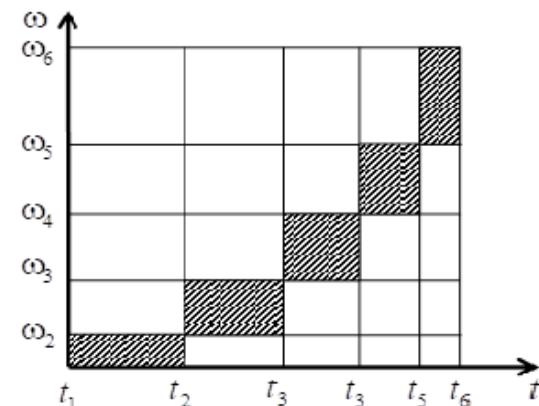


Рисунок 7 – Частотно-временное представление сигнала при  $T = const$  и  $N = const$

$G_n(p; q)$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$
	$p$	$q$	$p + q$	$p + 2q$	$2p + 3q$	$3p + 5q$	$5p + 8q$

Из  $G_n(p; q)$  следует общее правило образования последовательностей обобщенных рекуррентных чисел, в основе которых лежит основная последовательность Фибоначчи:

$$G_n(p, q) = pF_{n-2} + qE_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , числа основной последовательности Фибоначчи.

Таким образом, обобщенная рекуррентная последовательность  $G_n(p, q)$  состоит из двух последовательностей Фибоначчи, которые начинаются числами  $G_1 = p, G_2 = q$ .

- $q$ -последовательность с коэффициентами  $q = 1, 2, 3, \dots$  и  $p = 1$ ,

$$G_n(1, q) = F_{n-2} + qE_{n-1}, \quad (13)$$

- $p$ -последовательность с коэффициентами  $q = 1$  и  $p = 1, 2, 3, \dots$

$$G_n(p, 1) = pF_{n-2} + E_{n-1}. \quad (14)$$

Числа  $G_1 = p, G_2 = q$  своего рода гены, которые определяют значения всех последующих чисел и числовые свойства гармонических последовательностей.

**Последовательности  $q$ -чисел.** В случае целочисленных значений начальных значения  $G_1 = p = 1$  и  $G_2 = q = 1, 2, 3, \dots$  из соотношения (13) следует:

$G_n(p; q)$			$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	...
$G_n(1; 1) = F_n(1; 1)$	$p = 1$	$q = 1$	0	1	1	2	3	5	8	13	...
$G_n(1; 2)$	$p = 1$	$q = 2$	1	1	2	3	5	8	13	21	...
$G_n(1; 3)$	$p = 1$	$q = 3$	2	1	3	4	7	11	18	28	...
$G_n(1; 4)$	$p = 1$	$q = 4$	3	1	4	5	9	14	23	37	...

При значении  $q = 1$  образуется основная последовательность Фибоначчи  $G(1; 1) = F_n(1, 1)$ , при  $q = 2$  – усеченная последовательность Фибоначчи  $G(1; 2) = F_n(1, 2)$ , при  $q = 3$  – последовательность Люка  $G_n(1; 3) = L_n(1, 3)$ , при  $q = 4$  последовательность  $G_n(1; 4)$  и т. д.

В рассмотренных случаях  $G_1 = 1$  и  $G_2 = q$  были целые числа и числа  $q$ -последовательностей были также целыми числами. В случае, когда  $G_1 = 1$  и  $G_2 = q = \frac{1}{H}$ , т. е.  $G_2$  дробное число, получим последовательности:

$G_n(p; q)$			$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_7$	$G_7$
$G_n\left(1; \frac{1}{2}\right)$	$p = 1$	$q = \frac{1}{2}$	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	...
$G_n\left(1; \frac{1}{3}\right)$	$p = 1$	$q = \frac{1}{3}$	-2	3	1	4	5	9	14	23	37	...
$G_n\left(1; \frac{1}{4}\right)$	$p = 1$	$q = \frac{1}{4}$	-3	4	1	5	6	11	17	28	45	...
$G_n\left(1; \frac{1}{5}\right)$	$p = 1$	$q = \frac{1}{5}$	-4	5	1	6	7	13	20	33	53	...
.....	.....	.....	.....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$G_n\left(1; \frac{1}{10}\right)$	$p = 1$	$q = \frac{1}{10}$	-10	11	1	12	13	25	38	63	101	...

Таким образом, при  $p=1/H$  и  $q=1$  записана в следующем виде:  
 обобщенная  $q$ -последовательность может быть

$G_n\left(p; \frac{1}{H}\right)$	$\frac{1}{H}$	$-H+1$	$H$	$1$	$H+1$	$H+2$	$2H+3$	$3H+5$	$5H+8$	.....
----------------------------------	---------------	--------	-----	-----	-------	-------	--------	--------	--------	-------

**Последовательности  $p$ -чисел.** В случаях  $G_2 = p = 1, 2, 3, \dots$  из соотношения (14) образуются целочисленных значений  $G_2 = q = 1$  и  $p$ -последовательности.

$G_n(p; q)$			$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	...
$G_n(1; 1) = F_n(1; 1)$	$p = 1$	$q = 1$	0	1	1	2	3	5	8	13	...
$G_n(2; 1)$	$p = 2$	$q = 1$	-1	2	1	3	4	7	11	18	...
$G_n(3; 1)$	$p = 3$	$q = 1$	-2	3	1	4	5	9	14	223	...
$G_n(4; 1)$	$p = 4$	$q = 1$	3	4	1	5	6	11	17	28	...

В случае дробных значений  $p = 1/H$ :

$G_n(p; q)$			$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_7$	$G_7$
$G_n\left(\frac{1}{2}; 1\right)$	$p = \frac{1}{2}$	$q = 1$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
$G_n\left(\frac{1}{3}; 1\right)$	$p = \frac{1}{3}$	$q = 1$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	...
$G_n\left(\frac{1}{4}; 1\right)$	$p = \frac{1}{4}$	$q = 1$	3	1	4	5	9	14	23	37	60	...
$G_n\left(\frac{1}{5}; 1\right)$	$p = \frac{1}{5}$	$q = 1$	4	1	5	6	11	17	28	45	73	...
.....	.....	.....	.....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$G_n\left(\frac{1}{10}; 1\right)$	$p = \frac{1}{10}$	$q = 1$	9	1	10	11	21	32	53	85	138	...

Таким образом, при  $p=1/H$  и  $q=1$  образуются  $p$ -последовательности:

$G_n\left(\frac{1}{H}; 1\right)$	$\frac{1}{H}$	$H-1$	$1$	$H$	$H+1$	$H+2$	$2H+3$	$3H+5$	$5H+8$	...
----------------------------------	---------------	-------	-----	-----	-------	-------	--------	--------	--------	-----

Последовательность Фибоначчи ( $q = p = 1$ ) – простейшая рекуррентная последовательность, которая является линейной функцией с постоянными коэффициентами. По аналогии с гармоническими последовательностями Фурье [9], последовательность Фибоначчи является основной (первая гармоника), остальные рекуррентные

(гармонические) последовательности (вторая третья, четвертая и другие гармоники) кратны целым значениям коэффициента  $q$  и  $p$ .

**Теорема 2.** Частоты полигармонического сигнала при условии  $k=S \ll 1$  удовлетворяют обобщенному ряду Фибоначчи:

$$f_{i+1} = f_i + S f_{i-1}. \quad (15)$$

Доказательство. ◀ В соответствии с формулой (11) можно записать:

$f_{i+1} = f_i \cdot \exp\{S\}$ . Далее, учитывая, что  $k=S \ll 1$ , воспользуемся замечательным пределом:  $\exp\{S\} \approx 1 + S$ , в результате получим:

$$\begin{aligned} f_i(1+S) &= f_i + S \cdot f_{i-1} \cdot e^S = \\ &= f_i + S \cdot (1+S) f_{i-1}. \end{aligned}$$

Так как, исходя из условия  $k=S \ll 1 \Rightarrow S^2 \ll S$ , получим окончательно:

$$f_{i+1} = f_i + S f_{i-1}. \text{ Что и требовалось доказать. } \blacktriangleright$$

Нетрудно заметить, что последовательность (15) относится к  $r$ -последовательностям. Если положить  $k = S = 0.1 \Rightarrow H = 10$ , то получим обобщенную последовательность Люка:

$$\begin{aligned} G_n \left( \frac{1}{10}; 1 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{10} \{ 9 \ 1 \ 10 \ 11 \ 12 \ 23 \ 35 \ 58 \ 93 \ 151 \ 244... \} \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые свойства полученного ряда.

1. При начальных условиях  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 2$  отношение двух соседних чисел ряда (11)  $Q_i = \frac{f_{i+1}}{f_i}$  стремится к 1 при увеличении  $i$ , т.е.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = \frac{f_{i+1}}{f_i} \rightarrow 1.$$

2. Имеет место предельное отношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F1_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{f_i} \rightarrow 0.176.$$

3. Имеет место равенство  $q_i = (f_i)^2 - f_{i+1}f_{i-1}$ . Имеет место предел:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} q_i \rightarrow 0. \text{ Отсюда вытекает, что при } i \rightarrow \infty \Rightarrow f_i = \sqrt{f_{i+1}f_{i-1}}.$$

Т.е. средний член любой тройки чисел ряда  $\{f\}$  определяется как среднегеометрическое двух крайних членов (центральная частота каждого фильтра).

4. Коэффициент узкополосности

$$F = k = \frac{f_{i+1} - f_i}{\sqrt{f_{i+1}f_i}}$$

Частотные диапазоны удовлетворяют свойствам

1. Равные площади между частотами  $S = const$ .

2. Условие узкополосности на всем диапазоне удовлетворяет условию  $k = S = const$ .

3. Частоты связаны между собой обобщенным рядом Фибоначчи.

4. Такая расстановка частот соответствует логарифмированию частотного диапазона.

## Выводы

На основании, изложенного в статье материала можно сделать следующие выводы.

1. В соответствии с принципом дуальности сигналы можно синтезировать исходя их спектрального представления, а не временного.

2. Одним из перспективных направлений развития активной локации является использование полигармонических сигналов, дискретные компоненты энергетического спектра которых, могут быть расположены относительно друг от друга или равномерно, или в соответствии с законами кодовых последовательностей.

3. При увеличении числа компонент полигармонического сигнала он стремится к гиперболическому сигналу.

4. Мультипликативная трактовка расстановки частот (частотной полосы каждой компоненты) приводит к преобразованию носителя сигнала (времени или частоты), которое описывается двухпараметрической группой преобразований изоморфной линейной.

5. Коэффициент узкополосности («равнодобротности») при условии постоянства числа степеней свободы каждой компоненты полигармонического сигнала в геометрической интерпретации определяется площадью под гиперболической функцией.

6. Полосовые сигналы, которые можно рассматривать как обобщение полигармонических (можно получить инвертированием), позволяют получить функции неопределенности достаточно близкие к идеальным.

7. Частоты полигармонического сигнала можно представить в виде обобщенного ряда Фибоначчи.

## Список литературы

1. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.
2. Ипатов В.П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. – М.: Техносфера, 2007. – 256 с.
3. Назаров Л.Е., Зудилин А.С. Исследование эффективности приема сигнальных конструкций на основе OFDM-сигналов при наличии канальных полигармонических помех // Журнал радиоэлектроники. – 2018. – №3. – С.1.

4. Глинченко А.С., Тронин О.А. Исследование спектрально-вещного измерения частоты сигналов // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – №2. – С. 22-28.
5. Современная радиолокация. Анализ, расчет и проектирование / Под редакцией Кобзарев Ю.В. – М.: Сов. радио, 1969. – 704 с.
6. Бутырский Е.Ю. Функция неопределенности сигналов на группе преобразований // Информатика и космос. – 2008. – № 3. – С. 31-39.
7. Бутырский Е.Ю. Взвешенное преобразование Гильберта // Информатика и космос. – 2008. – №1. – С.11.
8. Бутырский Е.Ю., Донник А.А. Полигармонические сигналы // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. – 2016. – № 15-1. – С.17-26.
9. Бутырский Е.Ю. Математические модели гидроакустических сигналов и методы их обработки. – СПб: Стратегия будущего, 2018. – 613 с.
10. Зарайский В.А., Тюрин А.М. Теория гидролокации. – Л.: Военно-морская академия, 1975. – 603 с.
11. Stakhov A.P., Sluchenkova A.A., Massingue V. Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography. – Харьков: Изд-во «Основа» Харьковского университета, 1999.
12. Семенюта Н. Ф. Обобщенные числовые последовательности типа Фибоначчи [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321275.htm>
13. Стахов А.П. Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Журнал // Доклады Академии Наук Украины. – 1993. – Т. 208. – № 7.
14. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978.

Статья поступила в редакцию 6 августа 2020 г.

Принята к публикации 21 сентября 2020 г.

**Ссылка для цитирования:** Бутырский Е.Ю., Рахуба В.П. Полигармонические сигналы и их свойства // Национальная безопасность и стратегическое планирование. 2020. № 3(31). С.37-50. DOI: <https://doi.org/10.37468/2307-1400-2020-3-37-50>