МОЛЧАНОВ ВИКТОР НИКОЛАЕВИЧ

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРО ГИДРОГРАФИЧЕСКИХ СЕТЕЙ КАК ДИНАМИЧЕСКИ ОТКРЫТЫХ ВОДНЫХ СИСТЕМ (БЕЗОПАСНОСТЬ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ)

АННОТАЦИЯ

На модифицированных уравнениях Навье-Стокса, турбулентной диффузии тепла и примесей и уравнения неразрывности, размерностей (X,Y,t) и (X,t) рассмотрены различные формы задания краевых условий на свободных – открытых участках или точках границы области задания краевой задачи для численного моделирования макро гидрографических сетей в целях обеспечения безопасности водных ресурсов.

Ключевые слова: уравнения; водотоки; водоёмы; краевые условия; численное моделирование; открытые границы; стоки; источники.

MOLCHANOV V.N.

THE MACRO MODELING OF HYDROGRAPHIC NETWORKS AS A DYNAMIC OPEN WATER SYSTEMS. (OF WATER RESOURCES SECURITY)

ABSTRACT

Modified Navier-Stokes equations, turbulent diffusion of heat and impurities, and the equations of continuity, of dimensions (X,Y,t) and (X,t) considered different forms of the task of boundary conditions on the free – open areas or points of the border area of the task boundary problem for numerical modeling of macro hydrographic networks in order to ensure the safety of water resources.

Keywords: equations; watercourses; waterways; boundary conditions; numerical simulation; open borders; water courses, sources.

Введение

В геофизике и астрофизике, в особенности, пространство, в котором можно формализовать динамическую систему, будет всегда иметь «открытые границы», а тогда и «источники» или «стоки» количества движения, тепла, магнитного поля..: входящие в область решения (источники) или её покидающие (стоки). Например, для атмосферы: «источником» загрязнения аэрозолем «от земли» (элемент – «окно» на «твёрдом контуре» границы атмосферы) будет труба завода, а «стоком» – верхняя тропопауза – свободная граница области решения краевой задачи. В океанологии «источниками» могут быть реки, соответственно, «стоками» – жидкие (свободные) границы морей и океанов; в гидрологии «источниками» – притоки, а «стоками», соответственно – озёра, водохранилища, заливы и губы.

Предлагаются постановки краевых задач моделирования гидрографической сети: произвольной композиции связи водотоков и водоёмов, представленных уравнениями движения, турбулентной диффузии примесей и уравнением неразрывности и состояния во временно пространственном представлении (X,Y,t) и (X,t), где краевые условия будут выступать в роли «активных решателей задачи», а не просто «замыкателей системы» для её разрешимости.

Необходимо заметить, что предлагаемые уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости во временно пространственном представлении (X,Y,t) и (X,t), являются предельными по полноте описания для водоёмов и водотоков. Для водоёмов они получены в 1973 г. и опубликованы в 1975 г. В работах [1], [2], а для водотоков – в 2001 г. и опубликованы, например, в работах [3] и [4] .

Обобщённые двумерные уравнения, начальные и краевые условия для водотока и водоёма будут иметь вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U^2}{H}-K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{H}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{UV}{H}-K\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{H}\right)\right]-\alpha\, lV=$$
$$=-gH\cos\beta\left[\frac{H}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial x}-tg\beta(\frac{H}{2}\frac{\partial\beta}{\partial x}+1)\right]+$$
$$+\left(\tau_x-\chi U\left|\vec{U}\right|/H^2\right)\cos\beta \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{VU}{H}-K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{H}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{V^2}{H}-K\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{H}\right)\right]+\alpha\, lU=$$

$$=-gH\left[\frac{H}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right]+\tau_y-\chi V\left|\vec{U}\right|/H^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=\sum_{i,j=1}^{i=M,j=N}q_{i,j} \quad (3)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[C_i\frac{U}{H}-\overline{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C_i}{H}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[C_i\frac{V}{H}-\overline{K}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C_i}{H}\right)\right]=0 \quad (4)$$

$$\rho=\rho(S,T) \quad (5)$$

Начальные условия:

$$\xi,U,V\,|_{t=0}\equiv 0 \quad (6)$$

$$C_{i,j}\,|_{t=0}=\left\|C_{i,j}{}^{*}\right\| \quad (7)$$

$$\beta_{j|t=0}=\left\|\vec{\beta}_j\right\| \quad (8)$$

$$h_{i,j}\big|_{t=0}=\left\|h_{i,j}{}^{*}\right\| \quad (9)$$

Краевые условия:

$$C_m\big|_{\Gamma_1}=0 \quad (10)$$

$$\vec{U}_n\,|_{\tilde{A}_1}=0 \quad (11)$$

$$(\vec{U})'_n\,|_{\Gamma_2}=0, \qquad \vec{U}_n\,|_{\Gamma_2}=\vec{U}^*_n(\eta,\psi) \quad (12,12a)$$

$$\vec{U}_n\,|_{\tilde{A}_3}=\vec{U}^*_n \quad (13)$$

$$(C_i)'_n\,|_{\tilde{A}_1}=0 \quad (14)$$

$$C_i\,|_{\Gamma_2}=\begin{cases}(C_i)'_t=0, & \vec{U}_n\,|_{\Gamma_2}<0\\ (C_i)'_n=0, & \vec{U}_n\,|_{\Gamma_2}\geq 0\end{cases} \quad (15)$$

$$C_m\,|_{\Gamma_3}=C_m{}^{*} \quad (16)$$

где $U,V\equiv(u;v)H$; u,v – «эйлеровы скорости» размерности (x,y,z,t); $h_{i,j}=\left\|h^*_{i,j}\right\|$ – заданная матрица глубин; $K,\overline{K}\equiv(k;\overline{k})H$ – заданные коэффициенты турбулентного обмена количеством движения и веществом, температурой; $\left\|\beta_j\right\|$ – заданный угол наклона водной поверхности водотока; $\vec{g}$ – ускорение силы тяжести; ρ – плотность воды; $\tau_{x,y}\equiv\gamma W_{x,y}\left|\vec{W}\right|$ – касательное напряжение трения ветра о водную поверхность; γ – эмпирический коэффициент – энергетическая «добавка» или «вычет», который в общем случае может содержать и проектор компонентов приземного вектора ветра на оси координат; χ – коэффициент придонного трения; $C_i\equiv c_iH$, $i=1,2,3$; $c_1\equiv S$ – соленость; $c_2\equiv T$ – температура воды; $c_3\equiv c$ – пассивная примесь; Γ_1 – твердая граница контура (берег); Γ_2 – жидкая граница контура; Γ_3 – источники количества движения и примесей; n – внешняя нормаль контура; * – заданные значения; m – источники примесей; η, ψ – амплитуды и фазы прилива.

Запись одномерного уравнения движения для водотока с точностью до начертания букв аналогична двумерному представлению (1)

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Q^2}{\omega}-K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\omega}\right)\right]=$$

$$=-g\omega\cos\beta\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{H}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}-tg\beta\left(\frac{H}{2}\frac{\partial\beta}{\partial x}+1\right)\right]+$$

$$+(\tau_x-\tau_{xD})\cos\beta \quad (17),$$

где $Q=HB=u\omega$ – расход воды, B – ширина водотока, $\omega\equiv HB$ – площадь поперечного сечения водотока.

О краевых условиях

В 1975 г., в работе [1] автор впервые предложил на жидкой границе области численного решения задачи краевые условия нового типа – динамически адаптивные, например, (15). Они изменяют вид условия на границе одной функции – C в зависимости от поведения решения другой функции – U. Локально-точечно и (или) интегрально жидкая граница может быть во времени и пространстве «стоком» и «источником» количества движения (прилив, отлив – в морях) или массы (концентрации), например, загрязняющей примеси. Заметим, что в данном случае изменеие вида условия (15) определялось знаком ортонормальной компоненты скорости потока на элементе жидкой границы: «+» – внешняя нормаль – «сток» – условие «второго рода»; «-» – внутренняя нормаль – «источник» (нестационарный) – условие (квази) первого рода. «Квази» из-за нестационарности: знаки нормальной компоненты потока на границе в процессе решения могут меняться. А вот пример для одномерного представления водотока, когда на жидкой границе (его «правом конце») (18) мы задаём на временных шагах: Δt = k+1 – «прилив» (его гармоники – амплитуды и фазы) и Δt = k – «сток» реки. Здесь жидкая граница, её краевое условие не «динамический адаптант», как было раньше, а полноправный решатель «через шаг» численного интегрирования уравнеий краевой задачи типа (1) – (16) , но в одномерном представлении водотока.

$$Q\big|_{x=L} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q}{\omega}\right) = 0, & \Delta t = k \quad k = 0,1,2... \\ Q*(t,L) & \Delta t = k+1 \end{cases} \qquad (18)$$

Хочу заметить: условие второго рода – «верхнее» в (18) является «естественным» (так в 60-70 его величали), поскольку и уравнения движения и турбулентной диффузии примесей имеют второй порядок: содержат Лапласиан. На сеточном каркасе области численного решения задачи вторая производная на границе «фиктивно доопределяется» за границею области задания краевой задачи. Сравнение численных решений на стационирование на сетке Обской губы с различными краевыми условиями на жидкой границе (с Карским морем):

1) условие первого рода – $\xi\sqrt{gh}$ «ухода волны» («теория мелкой воды»);

2) второго рода и

3) условия вида (19) для уравнений движения (1) и (2)

показало, что разница по модулю решений невелика, но с условием 3) – (19) решение почти в 2 раза быстрее стационирует. Это вызвано тем, что в области решения краевой задачи, движение жидкости разбивается на циркуляционные ячейки. При подходе к границе и на самой границе, компоненты вектора скорости потока меняют модули и направления движения во времени и пространстве (циркулируют), а краевое условие эти изменения «адаптивно сопровождает».

$$\vec{U}_n\,|_{\Gamma_2} = \begin{cases} (\vec{U}_n)'_t = 0, \vec{U}_n < 0 \\ (\vec{U}_n)'_n = 0, \vec{U}_n \geq 0 \end{cases} \qquad (19)$$

$$\vec{U}_{n|}\,|_{\Gamma_2} = \begin{cases} t_k, (\vec{U})'_n = 0, \vec{U}_n \geq 0 \\ (\vec{U})'_t = 0, \vec{U}_n < 0 \\ t_{k+1}, \vec{U}_n \equiv \vec{U}^*{}_n(\eta,\psi) \end{cases} \qquad (20)$$

$$\vec{U}_n\,|_{\Gamma_3} = \vec{U}^*{}_n \qquad (21)$$

$$\vec{U}_n\,|_{\Gamma_3} = \vec{U}^*{}_n(1-\sigma\xi/h), \sigma > 0, \vec{U}^*{}_n = $$
$$= 0, \Gamma_3 \Rightarrow \Gamma_2 - \text{условие (19)} \qquad (22)$$

При моделировании динамики потоков и загрязнения на сетке Обской губы был применён и корректор краевого условия 1-го рада «источник» – заданные скорости потоков рукавов южной части дельты Оби вида (22). Они уменьшались пропорционально уровенной отметке ξ – нагона воды (от ветра) над глубиной h в этих источниках южной части губы. Разумеется, такой корректор содержит произвол выбора коэффициента «уменьшения» σ , но это на уровне «качества» не ухудшает решения, когда «классическое» условие первого рода принимается заданной константой.

Условие (20) – это аналог условия «сток» – «источник» (15) для уравнения (4) с добавлением прилива. Условие в «источнике» на твёрдом контуре типа (22) было впервые предложено в работе [1] и уточнено в работе [2]

Выводы

Рассмотрены примеры взаимодействия численного решения краевой задачи вплоть до свободной – открытой границы с видом краевых условий на ней. Предложен алгоритм выбора вида краевых условий на свободной границе в зависимости от поведения решения на границе в терминах «источник», «сток», т.е. алгоритм адаптации-выбора вида краевого условия на границе и решения во всей области краевой задачи.

Уравнения движения (1), (2) впервые были опубликованы в работе [1],[2], а затем уточнены-обобщены в работе [3]. В работе [4] расширены приложения указанных подходов. Эти уравнения, начиная с 2001 года, являются предельным обобщением механики жидкости во временно-пространственном представлении (X,Y,t) и (X,t) уравнений Навье-Стокса: они «обслуживают» водоёмы и водотоки, их произвольную композицию (сложный граф) единым – универсальным дифференциальным представлением, следовательно, и конечно-разностным и алгоритмическим, а «адаптивные краевые условия» вида (15), (19), (20), (22) делают математические модели максимально достоверными. Интересно: начиная с Леонарда Эйлера и Даниила Бернулли, коллегами был «опущен» в написании уравнений движения косинус-проектор ускорения силы тяжести на горизонтальную ось декартовых координат. Это «допустимо» для равнинных рек, но уже приведёт к большим ошибкам в случае горных рек. Кроме того ЭТО побудило гидрологов и гидравликов вводить искусственную форму гидравлического сопротивления-трения под названием «коэффициента Шэзи». В работах [3], [4], для водотоков в одномерном представлении, предложены формулы применимые для проектирования плотин-водосливов, в том числе ГЭС.

Список литературы

1. *Молчанов В. Н.* Гидродинамическая модель циркуляции в водоёме произвольной формы с произвольным набором загрязняющих источников, имеющих диффузионный характер // Материалы I Всесоюзного симпозиума «Океанографические аспекты охраны вод от химических загрязнений». – М.: Океанографическая комиссия АН СССР, 1975. – С.88 – 93.
2. *Молчанов В. Н.* Двумерные модели динамики потоков и загрязнения устьевых взморьев: диссертация … канд. физ.-мат. наук. Л.: ААНИИ, 1978. – 109 с.
3. *Молчанов В. Н.* Новые уравнения наклонённого движения вязкой жидкости размерности (X,Y,t) и (X,t), постановки краевых задач // Сборник трудов III Международной конференции «Естественные и антропогенные аэрозоли». Санкт-Петербург, 24-27 сентября 2001. – СПб.: НИИХ СПбГУ. – С. 519-528.
4. *Молчанов В. Н.* Трилогия. – СПб.: Стратегия будущего, 2011. – 229 с.