

## ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ-ОБНАРУЖЕНИЯ

БУТЫРСКИЙ ЕВГЕНИЙ ЮРЬЕВИЧ

## АННОТАЦИЯ

В настоящей статье рассмотрен вопрос определения степени критичности, оптимальных алгоритмов фильтрации и обнаружения детерминированного сигнала, к отклонениям параметров в рамках принятых моделей отраженного сигнала, помехи и шумов. Построена математическая модель оценки устойчивости алгоритмов фильтрации и обнаружения.

**Ключевые слова:** фильтрация; обнаружение; сигнал; модель; помеха; шум; устойчивость; алгоритм; оценка; критерий; процесс.

## ESTIMATION OF STABILITY OF ALGORITHMS FILTRATIONS-DISCOVERIES

BUTYRSKIY E. YU.

## ABSTRACT

The question of determination of degree of criticism is considered in the real article, optimal algorithms of filtration and discovery is built of the determined signal, to the rejections of parameters within the framework of the accepted models of the reflected signal, hindrance and noises. The mathematical model of estimation of stability of algorithms of filtration and discovery is built.

**Keywords:** filtration; discovery; signal; model; hindrance; noise; stability; algorithm; estimation; criterion; process.

## Введение

В настоящее время геополитические процессы, протекающие на мировой арене настолько многообразны и активны, что любой прогноз превращается в форму фантазий на ту или иную тему. Системы международных отношения подвергаются ревизии [1]. Но со стопроцентной уверенностью можно утверждать:

- агрессивность в отношении России со стороны стран Запада и их приспешников многократно возросла;
- центр агрессии и кукловоды расположены в США, которые руководствуются только своими интересами, целью которых является развал России изнутри с помощью пятой колонны и захват ее ресурсов, а также ослабление Европы как экономического соперника;
- в условиях санкций необходимо рассчитывать только на свои собственные силы и не особенно надеяться на помощь со стороны стран, которые пытаются вести более или менее самостоятельную игру на геополитическом поле, так как их самостоятельность сильно ограничена экономическими и политическими связями с США и ЕС (страны БРИКС, Турция и т.д.);
- исторический опыт показывает, что на мировой арене уважают сильных, а слабых только «пользуют»;
- эйфория начала 90-х, связанная с тем, что якобы наступила эпоха любви и дружбы с США и странами Запада у подавляющего большинства «демократов» прошла и теперь они буквально со слезами на глазах, обижено смотрят на США, спрашивая себя, чем же они так провинились перед ними (хотя для любого здравомыслящего человека было и

в 90-е понятно, что враг №1 это США и никто никаких иллюзий о дружбе и любви не испытывал).

Что такое Россия? Это 1/6 материковых земель, около 40 процентов мировых полезных ископаемых, подавляющее число источников питьевой воды. В то же самое время на этой огромной и богатейшей территории живет всего лишь 1/40 населения земли.

Поэтому уже давно «коллективный разум» остальной части «просвещенного мира» не может смириться с такой, с их точки зрения, несправедливостью. С каждым годом нападки на Россию будут только возрастать и это надо принять как данность, которую надо учитывать как во внутренней, так и во внешней политике. Россия всегда будет жить в стрессовом состоянии и поэтому во внутренней политике надо руководствоваться не западными шаблонами экономического рынка, который якобы все «устаканит» (тем более, что и Запад давно ушел от них), а стоять свою систему, учитывающую все реалии внешних и внутренних воздействий. Внутренняя экономическая политика государства должна быть более жесткой, а его влияние на экономику более активным. Что ни в коем случае не исключает рынок, но уменьшает риски, связанные с ценностными категориями. Рынок всегда ориентирован на получение максимальной прибыли и ему наплевать на все остальное. Крупные монополии могут пойти на любую сделку и даже на преступление, если это повысит их прибыльность (не взирая на то, что это может принести вред государству и его целостности). Жесткость в управлении экономикой, с точки зрения теории систем, означает уменьшение числа свободы элементов входящих в управляемую систему. Это позволит увеличить оперативность управления и сделать систему близкой к адаптивной.

Внутренняя политика государства, конечно не сводится только к экономической компоненте, но

она является ведущей. С точки зрения возможности дать адекватный ответ на внешние вызовы, вплоть до военных, огромное значение имеет силовая составляющая государства и, в частности Вооруженные Силы РФ. Многообразие вооружения и его возможности во многом определяются достижениями радиоэлектроники и ее устойчивостью к различного рода воздействиям. Особенно важен этот вопрос для систем освещения обстановки и управления оружием. Настоящая статья как раз и направлена на исследование этого вопроса.

### Уравнения оценки качества алгоритмов фильтрации-обнаружения

При практической реализации алгоритмов, синтезированных методами теории оптимальной линейной фильтрации-обнаружения, представляет интерес определить степень их критичности к изменениям характеристик и параметров входных сигналов, помех и шумов, т.е. выяснить, насколько ухудшается качество обнаружения сигнала при отклонениях входных воздействий от расчетных. Эти отклонения могут произойти по разным причинам и протекать по различным законам. В основе методов исследования поведения алгоритмов при отклонении параметров лежит представление о чувствительности.

Целью настоящей статьи, является определение степени критичности, оптимальных алгоритмов фильтрации-обнаружения детерминированного сигнала, к отклонениям параметров в рамках принятых моделей эхо-сигнала, помехи и шумов.

Если рассматривать задачу линейной фильтрации, то теоретически, с помощью фильтра Калмана, можно получить несмещенную оценку с минимальной дисперсией для вектора состояния линейной динамической системы, возмущаемой аддитивным белым шумом. Но, при использовании системы обработки гидроакустического сигнала в реальных условиях, её фактические характеристики могут оказаться хуже расчетных, а ошибка фильтрации значительно превышать ошибку, определенную с помощью ковариационной матрицы, вычисленной по уравнениям фильтра. При этом, несмотря на обработку новых данных наблюдения, возможно увеличение разности между фактической и расчетной ошибками. Это явление принято называть расходимостью процесса калмановской фильтрации. Расходимость фильтра имеет место и в задачах нелинейной фильтрации. Естественно, что расходимость фильтра, осуществляющего фильтрацию помехи, будет, в целом, приводить к ухудшению характеристик обнаружения системы обработки. Наиболее распространенной причиной расходимости является неадекватность реальным условиям динамической модели помехи, используемой в фильтре. В частности, спектральная плотность реверберационной помехи может оказаться, в силу частотно-зависимого характера процесса обратного рассеяния, отлич-

ной от спектральной плотности сигнала. При этом ошибки экстраполяции, вызванные неадекватностью модели, не учитываются в уравнениях фильтра. В экстраполированной оценке, во-первых, получается неучтенное смещение, и, во-вторых, при обработке очередного измерения эта оценка используется с несоответствующим действительности весом. В итоге, оценки фильтрации оказываются смещенными, а расчетная ковариационная матрица ошибки оценки не соответствует фактическим ошибкам оценивания.

Различают два типа расходимости процесса рекуррентной фильтрации. В случае, когда по мере увеличения числа входных данных, включающих помеху, матрица ошибок стремится хотя и к большой (в смысле какой-либо из норм) по сравнению с расчетной, но фиксированной величине, то говорят, что имеет место «мнимая» расходимость. Если же ошибка возрастает неограниченно, то говорят о «фактической» расходимости [2-3].

Общая идея борьбы с расходимостью процесса фильтрации заключается в увеличении тем или иным способом ковариационной матрицы ошибки оценки, вычисляемой фильтром на каждом шаге обработки. Эта идея обосновывается тем соображением, что несоответствие модели объекта добавляет в систему неопределенность, а это должно отражаться на ошибке.

При реализации этой идеи возможны два подхода:

- введение дополнительного шума в модель реверберационной помехи, при этом ковариация ошибки увеличивается непосредственно;
- изменение некоторым образом весов последних данных наблюдения с тем, чтобы фильтр учитывал их с меньшим весом, тем самым ошибки возрастают косвенно.

Известен ряд методов, использующих эти подходы для устранения процесса расходимости. Одним из перспективных путей, обеспечения устойчивости процессов рекуррентной обработки данных наблюдения, является применение адаптивных методов фильтрации [2,4-6].

Преимущество адаптивных фильтров состоит в том, что они позволяют обнаруживать наступление неустойчивого режима, в котором реальное поведение объекта плохо описывается его моделью. Это дает возможность отступать от стандартного калмановского веса текущих измерений, начиная только с соответствующего момента времени. Определив момент времени, когда модель начинает хорошо описывать поведение реального объекта, адаптивный фильтр снижает шум в оценках, уменьшая веса новых измерений вплоть до стандартных. Но устойчивость адаптивных фильтров достигается усложнением обработки и дополнительными аппаратными затратами.

С другой стороны, в силу того, что в алгоритме фильтрации-обнаружения, кроме фильтрации помехи присутствует процедура накопления (инте-

гирование произведения преобразованного сигнала и реализации [4,8]), способствующая устойчивости, то для анализа чувствительности, в условиях несоответствия априорных и реальных математических моделей сигналов, помех и шумов, требуется комплексный подход. Такой анализ позволит, в частности, определить границы изменения параметров, в пределах которых можно считать потери, вызванные некорректностью моделей, допустимыми, с точки зрения выбранного критерия.

При получении уравнений оценки качества алгоритмов фильтрации обнаружения воспользуемся предложенной в [2] методикой, для оценивания качества задачи фильтрации, в условиях когда модель помехи и шума не адекватны реальным.

Пусть предполагаемые (принятые при синтезе) модель уравнения наблюдения (измерения) и динамическое уравнение помехи определяются соответственно выражениями [3]:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \Theta \mathbf{S} + \mathbf{H}\mathbf{V} + \mathbf{n}_0, < \mathbf{n}_0(t) \mathbf{n}_0^T(t + \tau) > = 0.5 \mathbf{N}_0 \delta(\tau), \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{h}\mathbf{V} + \mathbf{n}_1, < \mathbf{n}_1(t) \mathbf{n}_1^T(t + \tau) > = 0.5 \mathbf{N}_1 \delta(\tau). \end{cases} \quad (1)$$

Оптимальный алгоритм фильтрации-обнаружения для данной задачи, дается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}_1^*}{dt} = \mathbf{h}\mathbf{V}_1^* + \mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{S} - \mathbf{H}\mathbf{V}_1^*) \\ \frac{d\mathbf{V}_0^*}{dt} = \mathbf{h}\mathbf{V}_0^* + \mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{S} - \mathbf{H}\mathbf{V}_0^*) \\ \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{H}^T \mathbf{N}_0^{-1} \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{H}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{H}^T - \mathbf{R}\mathbf{H}^T \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{H}\mathbf{R} \\ \frac{dF_0}{dt} = \mathbf{N}_0^{-1} F_0 (1 - F_0) (2\mathbf{u}_x - \mathbf{V}_0^* - F_0 \mathbf{S}_r) \\ \mathbf{S}_r = \mathbf{S} + \mathbf{V}_1^* - \mathbf{V}_0^* \end{cases} \quad (2)$$

Положим, что реальные математические модели совпадают с априорными с точностью до параметров.

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x = \Theta \mathbf{S}_x + \mathbf{H}_x \mathbf{V}_x + \mathbf{n}_{0x} \\ \frac{d\mathbf{V}_x}{dt} = \mathbf{h}_x \mathbf{V}_x + \mathbf{n}_{1x} \end{cases} \quad (3)$$

Где:  $\mathbf{n}_{0x}(t)$ ,  $\mathbf{n}_{1x}(t)$  – белые гауссовские шумы с матрицами спектральных плотностей  $\mathbf{N}_{0x}$ ,  $\mathbf{N}_{1x}$ , того же размера, что и в (1).

Применительно к реальной модели мгновенная ошибка фильтрации будет определяться выражениями (при гипотезах наличия или отсутствия сигнала  $\Theta = 1$ ,  $\Theta = 0$ ):

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{V}_x - \mathbf{V}_1^* \\ \mathbf{e}_0 = \mathbf{V}_x - \mathbf{V}_0^* \end{cases} \quad (4)$$

где под  $\mathbf{V}_1(t)$   $\mathbf{V}_0(t)$  следует понимать оценку помехи, осуществляемую оптимальным фильтром (2) при воздействии на него реального наблюдения  $\mathbf{u}_x(t)$  (соответственно при гипотезах наличия  $\Theta = 1$ , или отсутствия сигнала  $\Theta = 0$ ):

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}_{x1}^*}{dt} = \mathbf{h}\mathbf{V}_{x1}^* + \mathbf{K}(\mathbf{u}_x - \mathbf{S} - \mathbf{H}\mathbf{V}_{x1}^*) \\ \frac{d\mathbf{V}_{x0}^*}{dt} = \mathbf{h}\mathbf{V}_{x0}^* + \mathbf{K}(\mathbf{u}_x - \mathbf{H}\mathbf{V}_{x0}^*) \end{cases} \quad (5)$$

Продифференцируем равенства (82) по времени:

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_x}{dt} - \frac{d\mathbf{V}_1^*}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{e}_0}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_x}{dt} - \frac{d\mathbf{V}_0^*}{dt} \quad (6)$$

В выражения (6) подставим соответственно (3) и (4). В результате получим ( $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}$ ):

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \mathbf{h}_x \mathbf{V}_x - \mathbf{h}\mathbf{V}_1^* - \mathbf{K}\mathbf{H}_x \mathbf{V}_x + \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{V}_1^* - \mathbf{K}\Delta \mathbf{S} - \mathbf{K}\mathbf{n}_{0x} + \mathbf{n}_{1x} \\ \frac{d\mathbf{e}_0}{dt} = \mathbf{h}_x \mathbf{V}_x - \mathbf{h}\mathbf{V}_0^* - \mathbf{K}\mathbf{H}_x \mathbf{V}_x + \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{V}_0^* - \mathbf{K}\mathbf{n}_{0x} + \mathbf{n}_{1x} \end{cases} \quad (7)$$

Преобразуем соотношения следующим образом. Прибавим и отнимем к правым частям (7) величины  $\mathbf{h}\mathbf{V}_x$ ,  $\mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{V}_x$  и затем сгруппируем члены так, чтобы выделить ошибку фильтрации. После несложных преобразований имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = (\mathbf{h} + \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{e}_1 - (\Delta \mathbf{h} - \mathbf{K}\Delta \mathbf{H})\mathbf{V}_x + \mathbf{K}\Delta \mathbf{S} - \mathbf{K}\mathbf{n}_{0x} + \mathbf{n}_{1x} \\ \frac{d\mathbf{e}_0}{dt} = (\mathbf{h} + \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{e}_0 - (\Delta \mathbf{h} - \mathbf{K}\Delta \mathbf{H})\mathbf{V}_x - \mathbf{K}\mathbf{n}_{0x} + \mathbf{n}_{1x} \end{cases} \quad (8)$$

где:  $\Delta \mathbf{h} = \mathbf{h}_x - \mathbf{h}$ ,  $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}_x - \mathbf{H}$ .

Для построения системы уравнений, определяющих ошибки фильтрации и чувствительность алгоритма фильтрация-обнаружение требуется принять гипотезу относительно математической модели искажений сигнала  $\Delta \mathbf{S}$ . В частном случае, когда  $\Delta \mathbf{S} = 0$ , получаем уравнения эволюции ошибки, совпадающие по форме с уравнением в [2]. При этом  $\mathbf{e}_0(t) = \mathbf{e}_1(t) = \mathbf{e}(t)$ .

При учете  $\Delta \mathbf{S}$  возможны два основных подхода относительно исходных моделей искажения:

- $\Delta \mathbf{S}$  является случайным процессом;
- $\Delta \mathbf{S}$  является детерминированной функцией времени.

Положим, что искажения  $\Delta \mathbf{S}$  являются нормальным белым шумом (далее будет проведено обобщение на случай, когда  $\Delta \mathbf{S}$  моделируется в виде стохастического дифференциального уравнения).

Если величины  $\Delta \mathbf{h}$  и  $\Delta \mathbf{H}$  не равны тождественно нулю, то ошибки  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_0$  не образуют марковский процесс.

Введем векторные процессы  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{w}(t)$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{V}_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{1x} \\ \mathbf{n}_{0x} \\ \Delta \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (9)$$

С учетом (66), процесс  $\mathbf{x}(t)$  удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению, объединяющему (60) и (66) имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{w} \quad (10)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} - \mathbf{K}\mathbf{H} & \mathbf{0} & \Delta \mathbf{h} - \mathbf{K}\Delta \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h} - \mathbf{K}\mathbf{H} & \Delta \mathbf{h} - \mathbf{K}\Delta \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_x \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} I & -K & K \\ I & -K & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}, I - \text{единичная } (n \times n) \text{ матрица} \quad (11)$$

В соответствии с теоремой Дуба составной процесс  $x(t)$  является гауссовско-марковским [2,4,5]. Используя последний факт, по известным правилам записываем уравнения для математического ожидания  $M_x(t)$  и корреляционной матрицы  $R_x$  процесса  $x(t)$ :

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = FM_x \\ \frac{dR_x}{dt} = FR_x + R_x F^T + GN_w G^T \end{cases}$$

$$N_w = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{0x} & 0 \\ 0 & 0 & N_s \end{bmatrix} \quad (12)$$

$N_s$  -- спектральная плотность шума искажений.  
Выражения (12) можно расписать в виде системы уравнений для векторов и матриц размерностей  $n \times n$ . Для этого воспользуемся представлением вида:

$$M_x = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}, R_x = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21}^T & R_{31}^T \\ R_{21} & R_{22} & R_{32}^T \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где:  $M_1, M_0$  – математическое ожидание ошибки  $e(t)$  ( $\Theta = 1, \Theta = 0$ );  
 $M_3$  – математическое ожидание процесса  $V_x$ ;  
 $R_{11}, R_{22}$  – корреляционная матрица ошибок  $e_1(t), e_0(t)$ ;  
 $R_{33}$  – корреляционная матрица процесса  $V_x$ ;  
 $R_{ij}$  – взаимная корреляционная матрица ошибок  $e_1, e_2, V_x$ .

Учитывая выражения (12) и (13) найдем эволюционные уравнения описывающие  $M_p, R_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ . Для упрощения записей, введем следующие обозначения:

$$C = h - KN, \quad \Delta C = \Delta h - K\Delta N, \quad N_{11} = N_{1x}, \quad N_{22} = N_{0x}, \quad N_{33} = N_s.$$

Имеем:

$$FR_x = \begin{bmatrix} C & 0 & C \\ 0 & C & C \\ 0 & 0 & h_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21}^T & R_{31}^T \\ R_{21} & R_{22} & R_{32}^T \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$FR_x = \begin{bmatrix} CR_{11} + \Delta CR_{31} & CR_{21} + \Delta CR_{32} & CR_{31} + \Delta CR_{33} \\ CR_{21} + \Delta CR_{31} & CR_{22} + \Delta CR_{32} & CR_{32} + \Delta CR_{33} \\ h_x R_{31} & h_x R_{32} & h_x R_{33} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$R_x F^T = \begin{bmatrix} R_{11} C^T + R_{31}^T \Delta C^T & R_{21} C^T + R_{31}^T \Delta C^T & R_{31}^T h_x^T \\ R_{21} C^T + R_{32}^T \Delta C^T & R_{22} C^T + R_{32}^T \Delta C^T & R_{32}^T h_x^T \\ R_{31} C^T + R_{33} \Delta C^T & R_{32} C^T + R_{33} \Delta C^T & R_{33}^T h_x^T \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$GN_w G^T = \begin{bmatrix} I & -K & K \\ I & -K & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I & I \\ -K & -K & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$GN_w G^T = \begin{bmatrix} N_1 + KN_2 K + KN_3 K & N_1 + KN_2 K & N_1 \\ N_1 + KN_2 K & N_1 + KN_2 K & N_1 \\ N_1 & N_1 & N_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$FM_x = \begin{bmatrix} C & 0 & \Delta C \\ 0 & C & \Delta C \\ 0 & 0 & h_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CM_1 + \Delta CM_3 \\ CM_2 + \Delta CM_3 \\ h_x M_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Используя (12), (5) и (8), получим систему уравнений для математического ожидания ошибок и корреляционных матриц. Добавляя к ним уравнение для эволюции отношения правдоподобия или параметра обнаружения, имеем замкнутую систему дифференциальных уравнений определяющих ошибки фильтрации для случая неадекватного представления по параметрам помех, сигналов и шумов. Усредняя (12) по множеству, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = CM_1 + \Delta CM_3, \quad \frac{dM_2}{dt} = CM_2 + \Delta CM, \quad \frac{dM_3}{dt} = h_x M_3, \\ \frac{dR_{11}}{dt} = CR_{11} + \Delta CR_{31} + R_{11} C^T + R_{31}^T \Delta C^T + N_{11} + KN_{22} K^T + KN_{33} K^T, \\ \frac{dR_{22}}{dt} = CR_{22} + \Delta CR_{32} + R_{22} C^T + R_{32}^T \Delta C^T + N_{11} + KN_{22} K^T, \\ \frac{dR_{33}}{dt} = h_x R_{33} + R_{33} h_x^T + N_{11}, \\ \frac{dR_{21}}{dt} = CR_{21} + \Delta CR_{31} + R_{21} C^T + R_{32}^T \Delta C^T + N_{11} + KN_{22} K^T, \\ \frac{dR_{31}}{dt} = h_x R_{31} + R_{31} h_x^T + R_{33} \Delta C^T + N_{11}, \\ \frac{dV_{x1}^*}{dt} = h V_{x1}^* + K(u_x - S - H V_{x1}^*), \\ \frac{dV_{x0}^*}{dt} = h V_{x0}^* + K(u_x - H V_{x0}^*), \\ \frac{dF_0}{dt} = N^{-1}(1 - F_0)(2u_x - V_{x0}^* - F_0 S_r) S_r, \\ S_r = S + V_{x1}^* - V_{x0}^*, \quad R_{11}(0) = R_{22}(0) = R_{33}(0) = R_{31}(0) = R_{32}(0). \end{cases} \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что если модели точные, то есть имеют место равенства:

$$H = H_1, \quad h = h_1, \quad S = S_1, \quad N_1 = N_{11}, \quad N_0 = N_{22}$$

то получаем:

$$R_{11}(t) = R_{22}(t) = R_{33}(t) = R_{31}(t) = R_{30}(t) = R(t).$$

Решение системы уравнений (19) позволяет определить математическое ожидание и корреляционную матрицу ошибки фильтра при воздействии на него реальных помех и сигналов. Из системы следует также следующий вывод: если шум искажений сигнала центрирован, то среднее значение ошибки фильтрации при наличии и отсутствии сигнала совпадают.

Необходимо отметить, что система уравнений значительно упрощается, если положить, что  $\Delta S = 0$ . В этом случае, как нетрудно видеть, что:

$$M_1 = M_2 = M_e, \quad R_{11} = R_{22} = R_e, \quad R_{31} = R_{33} = R_{ve}.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{M}_e}{dt} &= (\mathbf{h} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{M}_e + (\Delta\mathbf{h} - \mathbf{K}\Delta\mathbf{H})\mathbf{M}_e \\
 \frac{d\mathbf{M}_e}{dt} &= \mathbf{h}_x\mathbf{M}_e \\
 \frac{d\mathbf{R}_e}{dt} &= (\mathbf{h} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{R}_e + (\Delta\mathbf{h} - \mathbf{K}\Delta\mathbf{H})\mathbf{R}_{3e} + \mathbf{R}_e(\mathbf{h} - \mathbf{K}\mathbf{H})^T + \mathbf{R}_{1e}^T(\Delta\mathbf{h} - \mathbf{K}\Delta\mathbf{H}) + \mathbf{N}_{11} + \mathbf{K}\mathbf{N}_{22}\mathbf{K}^T \\
 \frac{d\mathbf{R}_{3e}}{dt} &= \mathbf{h}_x\mathbf{R}_{33} + \mathbf{R}_{3e}(\mathbf{h} - \mathbf{K}\mathbf{H}) + \mathbf{R}_{33}(\mathbf{h} - \mathbf{K}\mathbf{H})^T + \mathbf{N}_{11} \\
 \frac{d\mathbf{R}_{33}}{dt} &= \mathbf{h}_x\mathbf{R}_{33} + \mathbf{R}_{33}\mathbf{h}^T + \mathbf{N}_{11}, \quad \frac{d\mathbf{R}_s}{dt} = \mathbf{h}_s\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_{33}\mathbf{h}^T + \mathbf{N}_{11} \\
 \frac{d\mathbf{V}_{x1}^*}{dt} &= \mathbf{h}\mathbf{V}_{x1}^* + \mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{S} - \mathbf{H}\mathbf{V}_{x1}^*) \\
 \frac{d\mathbf{V}_{x0}^*}{dt} &= \mathbf{h}\mathbf{V}_{x0}^* + \mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{V}_{x0}^*) \\
 \frac{dF_0}{dt} &= \mathbf{N}^{-1}(1 - F_0)(2\mathbf{u}_x - \mathbf{V}_{x0}^* - F_0\mathbf{S}_r) \\
 \mathbf{S}_r &= \mathbf{S} + \mathbf{V}_{x1}^* - \mathbf{V}_{x0}^*
 \end{aligned} \tag{20}$$

Положим, что искажения являются процессом, удовлетворяющим линейному стохастическому дифференциальному уравнению, описываемому гауссовско-марковский процесс:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{e}_4}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{e}_4 + \mathbf{n}_{44}, \quad \mathbf{e}_{44} = \Delta\mathbf{S}, \\
 < \mathbf{n}_{44}(t)\mathbf{n}_{44}^T(t + \tau) > &= 0.5\mathbf{N}_{44}(t)\delta(\tau).
 \end{aligned} \tag{21}$$

По аналогии с вышеизложенным введем векторные процессы:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{11} \\ \mathbf{n}_{22} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{n}_{44} \end{bmatrix}, \quad < \mathbf{x} > = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \Delta\mathbf{C} & \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \Delta\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{C} & \Delta\mathbf{C} & \mathbf{h}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{21}^T & \mathbf{R}_{31}^T & \mathbf{R}_{41}^T \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{32}^T & \mathbf{R}_{42}^T \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \mathbf{R}_{43}^T \\ \mathbf{R}_{41} & \mathbf{R}_{42} & \mathbf{R}_{43} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{44} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \Delta\mathbf{C} & \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \Delta\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{21}^T & \mathbf{R}_{31}^T & \mathbf{R}_{41}^T \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{32}^T & \mathbf{R}_{42}^T \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & \mathbf{R}_{43}^T \\ \mathbf{R}_{41} & \mathbf{R}_{42} & \mathbf{R}_{43} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}\mathbf{N}_w\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Проведя несложные, но громоздкие преобразования, получаем систему дифференциальных уравнений (22), определяющих ошибки фильтрации и обнаружения, при условии, когда реальные модели отличаются от априорных.

Уравнения (22) являются обобщением результата, полученного в [3], на задачу фильтрации-обнаружения. Структурно результаты [3] входят в систему (22) в виде замкнутой подсистемы уравнений для  $\mathbf{M}_2$ , характеризующих качество процедуры фильтрации помехи на фоне белого шума (только для гипотезы отсутствия сигнала). Остальные уравнения оценивают качество фильтрации при наличии сигнала и влияние ошибок фильтрации на качество обнаружителя, описываемого уравнением правдоподобия или уравнением для параметра обнаружения  $F_0$ .

Когда искажения сигнала детерминированы и неизвестны, то в этом случае, в уравнения математического ожидания оценки ошибки функция  $\mathbf{K}\Delta\mathbf{S}$  будет входить непосредственно (математическое ожидание от детерминированной функции есть сама функция).

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{M}_1}{dt} &= \mathbf{C}\mathbf{M}_1 + \Delta\mathbf{C}\mathbf{M}_3 + \mathbf{K}\mathbf{M}_4, \quad \frac{d\mathbf{M}_2}{dt} = \mathbf{C}\mathbf{M}_2 + \Delta\mathbf{C}\mathbf{M}_3, \\
 \frac{d\mathbf{M}_3}{dt} &= \mathbf{h}_x\mathbf{M}_3 + \mathbf{N}_{11}, \quad \frac{d\mathbf{M}_4}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{M}_4, \\
 \frac{d\mathbf{R}_{11}}{dt} &= \mathbf{C}\mathbf{R}_{11} + \Delta\mathbf{C}\mathbf{R}_{31} + \mathbf{K}\mathbf{R}_{41} + \mathbf{R}_{11}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{31}^T\Delta\mathbf{C} + \mathbf{R}_{41}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{N}_{11} + \mathbf{K}\mathbf{N}_{22}\mathbf{K}^T + \mathbf{K}\mathbf{N}_{44}\mathbf{K}^T, \\
 \frac{d\mathbf{R}_{22}}{dt} &= \mathbf{C}\mathbf{R}_{22} + \Delta\mathbf{C}\mathbf{R}_{32} + \mathbf{R}_{22}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{32}^T\Delta\mathbf{C}^T + \mathbf{N}_{11} + \mathbf{K}\mathbf{N}_{22}\mathbf{K}^T, \\
 \frac{d\mathbf{R}_{33}}{dt} &= \mathbf{h}_x\mathbf{R}_{33} + \mathbf{R}_{33}\mathbf{h}^T + \mathbf{N}_{11}, \quad \frac{d\mathbf{R}_{44}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{44} + \mathbf{R}_{44}\mathbf{A}^T + \mathbf{N}_{44}, \\
 \frac{d\mathbf{R}_{21}}{dt} &= \mathbf{C}\mathbf{R}_{21} + \Delta\mathbf{C}\mathbf{R}_{31} + \mathbf{R}_{21}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{32}^T\Delta\mathbf{C}^T + \mathbf{N}_{11} + \mathbf{K}\mathbf{N}_{22}\mathbf{K}^T, \\
 \frac{d\mathbf{R}_{31}}{dt} &= \mathbf{h}_x\mathbf{R}_{31} + \mathbf{R}_{31}\mathbf{h}^T + \mathbf{R}_{33}\Delta\mathbf{C}^T + \mathbf{N}_{11}, \\
 \frac{d\mathbf{R}_{41}}{dt} &= \mathbf{C}\mathbf{R}_{41} + \mathbf{R}_{41}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{43}\Delta\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{44}\mathbf{K}^T + \mathbf{N}_{44}\mathbf{K}^T, \\
 \frac{d\mathbf{R}_{32}}{dt} &= \mathbf{h}_x\mathbf{R}_{32} + \mathbf{R}_{33}\mathbf{h}^T + \mathbf{N}_{11}, \quad \frac{d\mathbf{R}_{42}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{42} + \mathbf{R}_{43}\Delta\mathbf{C}^T, \\
 \frac{d\mathbf{R}_{43}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{43} + \mathbf{R}_{43}\mathbf{h}^T, \quad \frac{d\mathbf{V}_{x1}^*}{dt} = \mathbf{h}\mathbf{V}_{x1}^* + \mathbf{K}(\mathbf{u}_x - \mathbf{S} - \mathbf{H}\mathbf{V}_{x1}^*), \\
 \frac{d\mathbf{V}_{x0}^*}{dt} &= \mathbf{h}\mathbf{V}_{x0}^* + \mathbf{K}(\mathbf{u}_x - \mathbf{H}\mathbf{V}_{x0}^*), \quad \mathbf{S}_r = \mathbf{S} + \mathbf{V}_{x1}^* - \mathbf{V}_{x0}^*, \\
 \frac{dF_0}{dt} &= \mathbf{N}_0^{-1}F_0(1 - F_0)(2\mathbf{u}_x - \mathbf{V}_0^* - F_0\mathbf{S}_r)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Анализ эффективности алгоритма фильтрации-обнаружения упрощается если воспользоваться представлением помехи в виде разности и суммы оценки помехи при гипотезах наличия и отсутствия сигнала. Обозначим:

$$\mathbf{V}_-^* = \mathbf{V}_{x1}^* - \mathbf{V}_{x0}^*, \quad \mathbf{V}_+^* = \mathbf{V}_{x1}^* + \mathbf{V}_{x0}^*. \tag{23}$$

Тогда вместо уравнений для оценивания  $\mathbf{V}_{x0}^*$ ,  $\mathbf{V}_{x1}^*$  получим:

$$\frac{d\mathbf{V}_-^*}{dt} = \mathbf{h}\mathbf{V}_-^* - \mathbf{K}(\mathbf{S} + \mathbf{H}\mathbf{V}_-^*), \quad \frac{d\mathbf{V}_+^*}{dt} = \mathbf{h}\mathbf{V}_+^* + \mathbf{K}(2\mathbf{u}_x - \mathbf{S} - \mathbf{H}\mathbf{V}_+^*). \tag{24}$$

Из последних соотношений видно, что оценка  $\mathbf{V}_-^*$  не зависит от поступающих данных  $\mathbf{u}(t)$  и поэтому может быть получена заранее, на основе только априорных сведений. Таким образом, алго-

ритмы фильтрации-обнаружения упрощаются, так как, в принципе, требуют для своей реализации только один фильтр для оценивания  $V_+^*$ .

Применительно к (22), имеет место следующий важный результат, который также обобщает вывод, полученный в [2]. Если реальные корреляционная матрица ошибок на момент времени  $t = 0$ , а также спектральные плотности формирующего шума помехи и шума, не больше чем расчетные, а другие параметры предполагаемых и действительных процессов одинаковы, то  $R_e(t)$ ,  $R(t)$  для всех  $t \geq 0$ . Следствием этого является повышение качества обнаружения, что следует из (22), в силу улучшения оценок помех. Смысл этого результата состоит в том, что если у действующего на входе фильтра помехи спектральная плотность шума наблюдения и дисперсия в начальный момент времени меньше, чем принятые при синтезе фильтра аналогичные характеристики процессов, то дисперсия ошибки будет меньше расчетных, а отношение сигнал/помеха на выходе обнаружителя будет выше.

Важность этого результата следует из того, что выбирая для синтеза фильтра наибольшие из диапазона априорной неопределенности значения спектральных плотностей и дисперсий, мы будем гарантированы, что действительная ошибка ограничена известным пределом, а отношение сигнал-помеха будет не меньше требуемого. Уравнения (22) допускают дальнейшее обобщение на задачи нелинейной фильтрации-обнаружения, если использовать уравнения расширенного фильтра Калмана [2,4-9].

### Заключение

В результате исследований получена система дифференциальных уравнений, определяющих оценку ошибки фильтрации и обнаружения сигналов на фоне помех и шумов, степень их коррелированности между собой в зависимости от рассогласования параметров

априорных и реальных моделей входных процессов. Проведено моделирование, полученных соотношений, на ЭВМ. В процессе моделирования задавались различные отклонения входных воздействий от расчетных и измерялись ошибки фильтрации и обнаружения. Моделирование подтвердило адекватность предложенных моделей оценки ошибок при решении задач обнаружения и фильтрации.

### Список литературы

1. *Бутырская И. Г.* Версальско-Вашингтонская система международных отношений // Национальная безопасность и стратегическое планирование. – 2014. – №4(8). – с. 96-103.
2. *Тихонов В. И., Харисов В. Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических систем и устройств. – М.: Радио и связь, 1991.
3. *Бутырский Е. Ю.* Оценка устойчивости алгоритмов фильтрации-обнаружения сигналов на фоне помех и шумов. – СПб: НИИ «Нептун», 2001.
4. *Сосулин Ю. Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. – М., Сов. радио, 1978. – 320с.
5. *Тихонов В. И., Кузьмин Н. К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1975. – 794 с.
6. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. – М.: Радио и связь, 1977. – 487с.
7. *Бутырский Е. Ю.* Основы сплайн-фильтрации сигналов // Информация и космос. – 2010. – № 1. – с. 34-39.
8. *Бутырский Е. Ю.* Обнаружение сигналов на фоне Марковской реверберационной помехи // Научное приборостроение. – 2012. – Т. 22. – № 3. – с. 87-95.
9. *Бутырский Е. Ю.* Развитие методов субоптимальной фильтрации и обнаружения сигналов // Электросвязь. – 2007. – № 11. – с. 39-42.