УДК 681.519

СПЛАЙН-МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И СПЛАЙН-ФИЛЬТРАЦИЯ

БУТЫРСКИЙ Е. Ю.

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье предложено представление непрерывной многомерной функции в виде взвешенной суммы одномерных функций, определенных на обобщенном базисе, сформированных как линейная суперпозиция аргументов исходной функции. Изложенный материал является основой теории сплайн-фильтрации, предложенной автором.

Ключевые слова: сплайн; представление; фильтрация; интерполяция; система; сигнал; модель; структура; базис.

SPLINE-MODELS OF SIGNALS AND SPLINE-FILTRATION

BUTYRSKIY E.YU.

ABSTRACT

In the real article presentation of continuous multidimensional function is offered as the self-weighted sum of unidimensional functions, certain on the generalized base, formed as linear superposition of arguments of initial function. The expounded material is basis of theory of spline – filtration, offered by an author.

Keywords: spline; presentation; filtration; interpolation; system; signal; model; structure; base.

Введение

В настоящее время геополитическая обстановка в мире в значительной степени определяется политикой США и стран ЕС, которая стала еще более агрессивной по отношению к России в связи с событиями на Украине. Как показывает исторический опыт в последние годы использование методов теории управляемого хаоса и абсолютно беспринципных действий западных стран можно добиться желаемых результатов, используя современные технологии и «ручные» СМИ. Так было в Северной Африке. Примерно то же происходит на Украине. В свете последних событий особенно актуальной становится борьба за информационное пространство. Информационным полем битвы становится не только Интернет, СМИ, но и также средства связи и управления. Но все эти компоненты, так или иначе, связаны с радиоэлектроникой и методами обработки сигналов в различных условиях. Одна из основных задач эта задача фильтрации сигналов и оценивание состояний динамических систем (ДС), которая является главенствующей в связи, управлении, освещении обстановки, радиоэлектронной борьбе.

При этом сложность алгоритма и качество фильтрации целиком определяется сложностью исходных математических моделей ДС, помехи, шумов наблюдения и законами их взаимодействия. Причем сложность алгоритмов резко возрастает с увеличением числа аргументов у функций, описывающих математические модели. Поэтому актуальной является задача такого представления многомерных функций, при котором возможно процессы обработки сигналов распараллелить по каждому из аргументов.

В статье, на основании представления непрерывной многомерной нелинейной функции в виде линейной суперпозиции одномерных функций [1], развиваются методы сплайн-фильтрации сигналов и оценивания состояния нелинейных динамических систем, основанные на линейных и квадратичных сплайн-представлениях нелинейных динамических систем (ДС). Преимущество рассматриваемой аппроксимации состоит в возможности согласовании математических моделей со структурой фильтра Калмана-Бьюси или фильтра второго порядка, так как позволяет легко перейти к независимой по каждой координате одномерной сплайн-аппроксимации (линейной или квадратичной). Получаемый при этом субоптимальный фильтр является фильтром с параметрами, значения которых меняются в зависимости от оценки состояния ДС.

В частности, показано, предложенный в статье подход требует меньших вычислительных затрат и имеет большие перспективы практического использования при решении самых разнообразных задач оценивания состояния ДС и обработки сигналов.

Теоремы аппроксимации многомерных функций

В работе [1], были доказаны теоремы об аппроксимации многомерных функций композицией одномерных на расширенном базисе аргументов. Так как настоящая статья является продолжением [1], то напомним некоторые из этих теорем, которые являются базовыми при построении алгоритмов субоптимального оценивания.

Теорема 1. *Многомерная непрерывная по своим аргументам функция $f(\mathbf{x})$ может быть с любой степенью точности представлена в виде следующего ряда:*

$$f(\mathbf{x}) \approx P_n(\mathbf{x}) = Q_n(\mathbf{x}) = \sum_j^m K_j \left(\sum_i^r h_{ij} x_i + d_j \right)^n, \quad (1)$$

где $f(.)$ – непрерывная функция, заданная над полем $\mathbf{R}^r$ $(f \in \mathbf{R})$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_r)$;

h_{ij}, d_j – задаваемые целые коэффициенты (h_{ij}, $d_j \in \mathbf{N}$);

K_j – коэффициенты, $K_j \in \mathbf{R}$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_r)$ – переменные, $x_i \in \mathbf{R}$; $m = \dfrac{(n+r-1)(n+r)}{2}$.

Обозначим $d_j = h_{r+1,j}$, $x_{r+1} = 1$ тогда формулу (1) можно записать в виде.

$$f(\mathbf{x}) \approx P_n(\mathbf{x}) = Q_n(\mathbf{x}) = \sum_j^m K_j \left(\sum_i^{r+1} h_{ij} x_i \right)^n. \quad (2)$$

Теорема 2. *Многомерная непрерывная по своим аргументам функция $f(x_1, x_2, ..., x_r)$ может быть с любой степенью точности представлена в виде следующего ряда:*

$$Q_n(\mathbf{x}) = C + \sum_i^r \sum_j^n a_{ij} x_i^j + \sum_p^n \sum_j^r K_{ij} \left(\sum_i^r c_{ij} x_i \right)^p = $$
$$= C + \sum_p^n \sum_j^{2r} K_{ij} \left(\sum_i^r c_{ij} x_i \right)^p. \quad (3)$$

Обобщим полученные выражения для определения оптимальных коэффициентов K_j на многомерный случай. Положим, что задана многомерная функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_r)$.

$$E = \int_{\mathbf{X}_1} ... \int_{X_n} \left[f(x_1, ..., x_n) - \sum_j^m K_j \left(\sum_i^n c_{ij} x_i + d_j \right)^n \right]^2 dx_1 ... dx_n,$$

$$\frac{\partial E}{\partial K_j} = 2 \int_{\mathbf{X}_1} ... \int_{X_n} \left[f(x_1, ..., x_n) - \sum_j^m K_j \left(\sum_i^n c_{ij} x_i + d_j \right)^n \right] \left(\sum_i^n c_{ij} x_i + d_j \right)^n dx_1 ... dx_n$$

Обозначим $A_i = \int_{\mathbf{X}_1} ... \int_{X_n} f(x_1, ..., x_n) \left(\sum_i^n c_{ij} x_i + d_j \right)^n dx_1 ... dx_n = \int_{\mathbf{X}} f(\mathbf{x}) z_i^n d\mathbf{x}$,

$$Z_{ij} = \int_{X_1} ... \int_{X_n} \left(\sum_i^n c_{ij} x_i + d_j \right)^n \left(\sum_i^n c_{ij} x_i + d_i \right)^n dx_1 ... dx_n = \int_{\mathbf{X}} z_i^n z_j^n d\mathbf{x},$$

$$z_i = \sum_i^n c_{ij} x_i + d_i, \quad z_j = \sum_i^n c_{ij} x_i + d_j, \quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$$

Система уравнений для определения вектора коэффициентов $\mathbf{K} = (K_1, K_2, ..., K_m)^T$ может быть представлена следующим образом $\sum_j^m Z_{ij} K_j = A_i$. или в векторно-матричной форме: $\mathbf{ZK} = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}$

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & ..... & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & ..... & Z_{2m} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ Z_{m1} & Z_{m2} & ..... & Z_{mm} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ ... \\ A_m \end{vmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ ... \\ K_m \end{vmatrix}, \quad m = \frac{(n+r-1)(n+r)}{2}.$$

Выражению (2) можно придать несколько иную форму, если вместо линейного преобразования $z_j = c_{1j} x_1 + c_{2j} x_2 + ... + c_{rj} x_r$ рассмотреть линейное преобразование $z_j = c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2 + ... + c_{rj}x_r + A_j$. Тогда теорема о представлении многомерной функции можно сформулировать следующим образом:

Теорема 3. *Многомерная непрерывная по своим аргументам функция $f(x_1, x_2, .., x_r)$ может быть с любой степенью точности представлена в виде следующего ряда:*

$$f(\mathbf{x}) \approx Q(\mathbf{x}) = \sum_j^n K_j \left(\sum_p^r c_{jp} x_p + d_j \right)^n = \sum_j^n K_j z_j^n \quad (4)$$

Соотношение (4), в силу наличия свободного слагаемого d_j, позволяет получить все возможные произведения:

$$\sum_{k_1+k_2+..+k_r=j}^{j} c x_1^{k_i} x_2^{k_2} ... x_q^{k_r} \;, \quad \forall j \in [0, n] \quad (5)$$

и, поэтому может также быть использовано в качестве представления многомерных функций. Многомерная аппроксимация, не самоцелью, а лишь первым этапом в решении задачи покомпонентной сплайн-фильтрации и оценивания состояния нелинейных динамических систем.

Эта задача должна решаться в три этапа:

1. Представление исходной многомерной функции в виде взвешенной суммы одномерных функций.

2. Аппроксимация полученных одномерных функций одномерными линейными или квадратичными сплайнами.

3. Построение фильтра Калмана-Бьюси или фильтра второго порядка.

Аппроксимация динамических систем линейными сплайнами

Применение многомерных сплайнов при аппроксимации нелинейных динамических систем, ограничивается использованием сплайнов первого и второго порядка [2-5]. Это обуславливается тем, что структура фильтра Калмана-Бьюси является оптимальной для линейных систем и может быть только адаптирована к системам, имеющим квадратичные зависимости. Сплайны более высоких степеней при сохранении этой структуры перспектив на применение не имеют. С другой стороны, теория аппроксимации многомерными сплайнами требует задания множества узловых точек и условий их согласования. При большом числе аргументов, это требует значительных вычислительных затрат.

Сплайновые функции представляют собой мощное и привлекательное в вычислительном отношении средство современной теории аппроксимации. Сплайны обладают рядом интересных свойств:

- если аппроксимируемая функция неотрицательна, то такова и аппроксимирующая функция;
- сплайновая аппроксимация равномерно сходится к аппроксимируемой функции при возрастании степени используемых полиномов или числа узлов;
- можно построить точные границы ошибок аппроксимации, использующие только свойство непрерывности функции;
- достаточно точные аппроксимации получаются даже при низких степенях полиномов и малом числе узлов, поэтому необходимая память и вычислительные требования невелики.

Использование сплайновых аппроксимаций позволяет ослабить «проклятие размерности». Так как сплайновые аппроксимации дают более точные оценки по сравнению с чистым квантованием, то их применение позволяет при той же точности аппроксимации использовать более грубое квантование. Этот факт является прямым следствием сглаживающего действия сплайнов.

В статье будет рассмотрен подход, основанный на представлении многомерной нелинейной функции в виде линейной суперпозиции одномерных функций, аргументами которых являются аргументы исходной функции или их линейная комбинация. Такое представление развивает идеи, лежащие в основе теории искусственных нейросетей, а также теоремы Колмогорова, в соответствии с которой любая многомерная функция может быть представлена в виде сумм и произведений одномерных функций. Преимущество такой аппроксимации состоит в согласовании представления со структурой фильтра Калмана-Бьюси, так как позволяет легко перейти к независимой по каждой координате одномерной сплайн-интерполяции (линейной или квадратичной). Получаемый при этом фильтр является фильтром Калмана-Бьюси с параметрами, значения которых меняются в зависимости от оценки состояния динамической системы.

В более общей постановке задача аппроксимации функций многих переменных составляет существо 13-ой проблемы Гильберта. Гильберт полагал, что представить функцию многих переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных невозможно. В ряде своих работ А.Н. Колмогоров и В.И. Арнольд получили целый ряд теоретических результатов опровергающих тезис Гильберта [6,7].

Теорема о возможности представления непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных.

Теорема о представлении любой непрерывной функции трех пе-ременных в виде суммы функций не более двух переменных.

Теорема, в соответствии с которой любую непрерывную функцию n переменных можно получить с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции непрерывных функций одного переменного.

Впоследствии эти результаты неоднократно уточнялись и развивались [8-12]. В работе [8] излагается метод построения аппроксимаций многомерных функций, основанный на линейных преобразованиях ее аффинных сечений. Метод позволяет приближать функцию многих переменных с помощью композиций функций одной переменной, имеющих простую геометрическую интерпретацию. В этом случае удается формализовать и использовать информацию о качественном поведении сечений многомерной функции. Наряду с полной формой представления функций многих переменных в работе предложен также ряд усеченных форм и, в частности, представления многомерной функции или только в виде суммы одномерных функций или их произведения. Общее количество функций, участвующих в представлении определяется выражением $N = n^2 + n - 1$, где $n -$ общее число переменных. Данный подход был положен в основу компьютерной программы, позволяющей решать задачи аппроксимации нелинейных многомерных зависимостей по результатам их неупорядоченных наблюдений в отдельных точках с учетом информации об их поведении вдоль отдельных переменных.

В исследовании [9], на основе представления, предложенного А. Н. Колмогоровым:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{q=\mathbf{0}}^{\mathbf{2N}} \Phi_q\left(\mathbf{G}_q\left(\mathbf{x}\right)\right),$$

$$\mathbf{G_q}\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{p=1}^{N} \lambda^p \psi\left(x_p + \varepsilon q\right),$$

где $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $\lambda = \lambda(N) = const$, $\varepsilon = const$;

$\mathbf{F}$ – произвольная многомерная непрерывная функция;

Ψ – непрерывная функция одного переменного;

$\mathbf{G_q}$ – внутренняя функция; $\Phi_\mathbf{q}$ – внешняя функция,

разработаны эффективные конструкции построения $\left\{\Phi_q\right\}$ и $\left\{\mathbf{G_q}\right\}$, в том смысле, что предъявляется явный вид функции Ψ и построение $\left\{\Phi_q\right\}$, $\left\{\mathbf{G_q}\right\}$ проводится по функции $\mathbf{F}$ с использованием значений ее модуля непрерывности.

В целом необходимо отметить, что предложенные методы представления многомерных функций, в упомянутых выше работах [6-12], в целом адаптированы только для решения задач приближения, и не учитывают характера задач оценивания. Здесь следует упомянуть значительные вычислительные затраты и необходимость решения задачи оценивания в реальном масштабе времени. Поэтому желательно, чтобы представление многомерной функции, носило структурно однородный вид, т.е. состояло из одномерных функций одинакового вида, но по разным аргументам. Проведенные исследования, изложенные в данной статье, как раз и направлены на поиск таких представлений.

Применительно к рассматриваемой задаче аппроксимации функции, встроенной в уравнение состояния ДС, конфигурация сети определяется условием ее согласования со структурой калмановской фильтрации. Это связано с тем, что именно в рамках линейной фильтрации Калмана, возможно получить замкнутые и реализуемые алгоритмы оценивания

Положим, что задача аппроксимации многомерной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ линейной суперпозицией одномерных функций, решена и оптимальные коэффициенты, минимизирующие квадрат ошибки оценивания, получены [1]. Вторым этапом является адаптация, полученного разложения, к структуре фильтра Калмана-Бьюси. Для этого предлагается полученные одномерные функции, которые являются нелинейными, аппроксимировать одномерными линейными сплайнами. Так как, каждая компонента векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ аппроксимировалась независимо, то каждое одномерное представление линейным сплайном можно строить параллельно, т.е. выбирать узловые точки кусочно-линейных функций только в рамках своего носителя, без согласования с точками на других носителях или на тех же носителях, но других компонент векторной функции.

Необходимо отметить, что предложенная конфигурация разложения, когда внешние коэффициенты задаются, а внутренние h_{ij}, d_j (формула 1) оптимизируются, не является единственной. Рассмотрим альтернативную конфигурацию двойственного ряда: внутренние коэффициенты выбираются из множества целых чисел, а внешние оптимизируются. Такая конфигурация представляется более привлекательной, с точки зрения, методичности подхода, так как позволяет определять множество двойственных коэффициентов решая систему линейных уравнений, а не используя эмпирические методы обучения нейросети. С другой стороны, эта конфигурация также может рассматриваться как одна из реализаций нейросети со всеми вытекающими следствиями (в частности использование различных методов обучения сети).

Положим, что задача аппроксимации многомерной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ линейной суперпозицией одномерных функций, решена и оптимальные коэффициенты, минимизирующие квадрат ошибки оценивания, получены. Вторым этапом является адаптация, полученного разложения, к структуре фильтра Калмана-Бьюси. Для этого предлагается полученные одномерные функции, которые являются нелинейными, аппроксимировать одномерными линейными сплайнами.

Так как, каждая компонента векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ аппроксимировалась независимо, то каждое одномерное представление линейным сплайном, можно строить параллельно, т.е. выбирать узловые точки кусочно-линейных функций, только в рамках своего носителя, без согласования с точками на других носителях или на тех же носителях, но других компонент векторной функции.

Рассмотрим нелинейную многомерную ДС следующего вида:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_1(t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_r),$$
$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_r). \tag{6}$$

Каждую компоненту $f_i(\mathbf{x})$ нелинейной многомерной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $i \in [1, r]$ представим в одной из форм двойственного ряда, в частности (1):

$$f_q(\mathbf{x}) = \sum_j^n K_{ij}\left(\sum_i^r c_{qij}x_i + d_{qj}\right)^n,$$

где q – компонента функции $\mathbf{f} = \left(f_1, f_2, ..., f_q, ..., f_r\right)$, $q \in [1, r]$; i – текущий индекс по аргументам (компонента состояния динамической системы) $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_r\right)$, $i \in [1, r]$; j – текущий индекс по линейной композиции аргументов $\mathbf{x} = \left\{x_i\right\}$, $\mathbf{z} = \left(z_1, z_2, ..., z_j, ..., z_n\right)$, $j \in [1, n]$.

Обозначим $z_{qj} = \sum c_{qij}x_i + d_{qj}$, тогда компоненту нелинейной функции $f_q(\mathbf{x})$ можно представить в следующей форме:

$$f_q(\mathbf{x}) = \sum_j^n K_{qj} z_{qj}^n \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}\mathbf{z}^n.$$

Аппроксимируем квадрат компоненты z_{qj} кусочно-линейной функцией (сплайн первого порядка дефекта 1). В результате получим:

$$z_{qj}^n \approx a_{qj}^{(s)} z_{qj} + b_{qj}^{(s)} \Rightarrow \mathbf{z}^n = \mathbf{a}^{(s)}\mathbf{z} + \mathbf{b}^{(s)}, \tag{7}$$

где коэффициенты в (7) принимают значения $a_{qj}^{(s)}, b_{qj}^{(s)}$, если обобщенная переменная z_{qj} принадлежит области $\left[z_{qj}^{(s)}, z_{qj}^{(s+1)}\right]$, т.е.:

$$z_{qj} \in \left[z_{qj}^{(s)}, z_{qj}^{(s+1)}\right] \Rightarrow \mathbf{z} \in \left[\mathbf{z}^{(s)}, \mathbf{z}^{(s+1)}\right] = \mathbf{Z}^{(s)};$$

s – текущий индекс области.

С учетом (7) компоненту нелинейной многомерной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, можно представить в виде:

$$f_q(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}}^{\mathbf{n}} K_{qj}\left[a_{qj}^{(s)} z_{qj} + b_{qj}^{(s)}\right]. \tag{8}$$

Необходимо отметить, что аппроксимация функции z_{qj}^n сплайном первой степени не зависит от индексов q, j. Для любой обобщенной переменной z_{qj}, коэффициенты $a_{qj}^{(s)}, b_{qj}^{(s)}$ будут зависеть только от номера s области определения кусочно-линейной функции.

В формуле (8) вместо обобщенной переменной подставим ее определение $z_{qj} = \sum c_{qij}x_i + d_{qj}$ и раскроем скобки. В результате получим:

$$f_q(\mathbf{x}) = \sum_j^n K_{qj}\left[a_{qj}^{(s)}\left(\sum c_{qij}x_i + d_{qj}\right) + b_{qj}^{(s)}\right] =$$
$$= \sum_j^n\left[\left(\sum_i^r K_{qj}a_{qj}^{(s)}c_{qij}x_i + K_{qj}a_{qj}^{(s)}d_{qj}\right) + K_{qj}b_{qj}^{(s)}\right].$$

Обозначим $A_{qij}^{(s)} = K_{qj}a_{qi}^{(s)}c_{qj}$, $B_{qj}^{(s)} = K_{qj}a_{qj}^{(s)}d_{qj} + K_{qj}b_{qj}^{(s)}$. Тогда компоненту многомерной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ можно записать как:

$$f_q(\mathbf{x}) = \sum_j^n\left[\sum_i^r A_{qij}^{(s)}x_i + B_{qj}^{(s)}\right]. \tag{9}$$

Соотношение (9) определяет представление нелинейной многомерной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в виде совокупности одномерных линейных сплайнов (кусочно-линейных функций). Как следует из вышеизложенного, такое представление не является единственным, так как зависит от принятых значений установочных коэффициентов, а также от конфигурации представления многомерной функции в виде взвешенной суммы одномерных функций.

Распишем выражение (9) по компонентам. Получим систему уравнений, описывающих нелинейное представление функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \sum_j^n\left[\sum_i^r A_{1ij}^{(s)}x_i + B_{1j}^{(s)}\right] = \left[\sum_j^n A_{11j}^{(s)}\right]x_1 + \left[\sum_j^n A_{12j}^{(s)}\right]x_2 + ... + \left[\sum_j^n A_{1rj}^{(s)}\right]x_r + \sum_j^n B_{1j}^{(s)} \\ f_2(\mathbf{x}) = \sum_j^n\left[\sum_i^r A_{2ij}^{(s)}x_i + B_{2j}^{(s)}\right] = \left[\sum_j^n A_{21j}^{(s)}\right]x_1 + \left[\sum_j^n A_{22j}^{(s)}\right]x_2 + ... + \left[\sum_j^n A_{2rj}^{(s)}\right]x_r + \sum_j^n B_{2j}^{(s)} \\ ----- \quad ------ \quad ------ \quad ------ \quad ------ \quad ------ \quad ----- \\ f_r(\mathbf{x}) = \sum_j^n\left[\sum_i^r A_{rij}^{(s)}x_i + B_{rj}^{(s)}\right] = \left[\sum_j^n A_{r1j}^{(s)}\right]x_1 + \left[\sum_j^n A_{r2j}^{(s)}\right]x_2 + ... + \left[\sum_j^n A_{r2j}^{(s)}\right]x_r + \sum_j^n B_{rj}^{(s)} \end{cases}.$$

Систему уравнений, описывающих нелинейную функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ можно более компактно записать в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^t + \sum_{j}^{n} \mathbf{B}_j^{(s)}, \qquad (10)$$

где $$\mathbf{A}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{11j}^{(s)} & A_{12j}^{(s)} & .... & A_{1rj}^{(s)} \\ A_{21j}^{(s)} & A_{22j}^{(s)} & .... & A_{2rj}^{(s)} \\ .... & .... & .... & .... \\ A_{r1j}^{(s)} & A_{r2j}^{(s)} & .... & A_{rrj}^{(s)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} K_{1j} a_{11}^{(s)} c_{11j} & K_{1j} a_{12}^{(s)} c_{12j} & .... & K_{1j} a_{1r}^{(s)} c_{1rj} \\ K_{2j} a_{21}^{(s)} c_{21j} & K_{2j} a_{22}^{(s)} c_{12j} & .... & K_{2j} a_{2r}^{(s)} c_{2rj} \\ .... & .... & .... & .... \\ K_{rj} a_{r1}^{(s)} c_{r1j} & K_{rj} a_{r2}^{(s)} c_{r3j} & .... & K_{rj} a_{rr}^{(s)} c_{rrj} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{j}}^{(s)} = \begin{pmatrix} B_{1j}^{(s)} \\ B_{2j}^{(s)} \\ .... \\ B_{rj}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1j} a_{1j}^{(s)} d_{1j} + K_{1j} b_{1j}^{(s)} \\ K_{2j} a_{2j}^{(s)} d_{2j} + K_{2j} b_{2j}^{(s)} \\ .... \\ K_{rj} a_{rj}^{(s)} d_{rj} + K_{rj} b_{rj}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

С учетом соотношения (10), система дифференциальных уравнений, моделирующих нелинейную динамическую систему, может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \left[\sum\limits_{j}^{n} A_{11j}^{(s)} \right] x_1 + \left[\sum\limits_{j}^{n} A_{12j}^{(s)} \right] x_2 + ... + \left[\sum\limits_{j}^{n} A_{1rj}^{(s)} \right] x_r + \sum\limits_{j}^{n} B_{1j}^{(s)} + n_{11}(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \left[\sum\limits_{j}^{n} A_{21j}^{(s)} \right] x_1 + \left[\sum\limits_{j}^{n} A_{22j}^{(s)} \right] x_2 + ... + \left[\sum\limits_{j}^{n} A_{2rj}^{(s)} \right] x_r + \sum\limits_{j}^{n} B_{2j}^{(s)} + n_{12}(t) \\ ---- \quad ---- \quad ---- \quad ---- \quad ---- \quad ---- \quad ---- \\ \dfrac{dx_r}{dt} = \left[\sum\limits_{j}^{n} A_{r1j}^{(s)} \right] x_1 + \left[\sum\limits_{j}^{n} A_{r2j}^{(s)} \right] x_2 + ... + \left[\sum\limits_{j}^{n} A_{r2j}^{(s)} \right] x_r + \sum\limits_{j}^{n} B_{rj}^{(s)} + n_{1r}(t) \end{cases}. \qquad (11)$$

Или в векторно-матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^T + \sum_{j}^{n} \mathbf{B}_j^{(s)} + \mathbf{n}_1(t),$$

$$z_{qj} = \sum_{i}^{r} c_{qij} x_i + d_{qj} \;\Rightarrow\; \mathbf{z}_j = \mathbf{C}_j \mathbf{x}^{\mathrm{T}} + \mathbf{d}_j. \qquad (12)$$

Систему уравнений необходимо дополнить условиями принятия того или иного значения $\mathbf{A}_j^{(s)}$, $\mathbf{B}_j^{(s)}$ в зависимости от области, в которой находится обобщенная переменная z_{ij}. А именно: коэффициенты, определяющие коэффициент сноса $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ уравнений (10-12) принимают значения $A_{qij}^{(s)}$, $B_{qj}^{(s)}$ ($\mathbf{A}_j^{(s)}$, $\mathbf{B}_j^{(s)}$), если $z_{qj} \in [z_{qj}^{(s)}, z_{qj}^{(s+1)})$ ($\mathbf{z}_j \in [\mathbf{z}_j^{(\mathbf{s})}, \mathbf{z}_j^{(\mathbf{s+1})}) = \mathbf{G}^{(s)}$). Причем коэффициенты $A_{qij}^{(s)}$, $B_{qj}^{(s)}$ связаны с коэффициентами линейного сплайна следующими соотношениями: $A_{qij}^{(s)} = K_{qj} a_{qi}^{(s)} c_{qj}$, $B_{qj}^{(s)} = K_{qj} a_{qj}^{(s)} d_{qj} + K_{qj} b_{qj}^{(s)}$.

Переход из одной области $z_{qij} \in [z_{qij}, z_{(q+1)ij})$ в другую происходит тогда, когда совокупное изменение аргументов x_p приведет к изменению границ применимости линейной функции с заданными в области коэффициентами. Общее число уравнений (11) равно числу переменных z_{ij}. Таким образом, моделирование нелинейной динамической системы кусочно-линейными функциями сводится к моделированию уравнений (10-12). Уравнения динамической системы в областях $z_{qij} \in [z_{qij}, z_{(q+1)ij})$ являются линейными. Но характер нелинейности в принципе сохраняется, так как характеристики динамической системы скачкообразно меняются от области к области.

Метод аппроксимации нелинейных динамических систем является двухэтапным. Он включает этап представления многомерной функции в виде взвешенной суммы одномерных функций и этап аппроксимации одномерных функций сплайнами (линейными или квадратичными). Поэтому его можно также определить, как метод двойной аппроксимации, подчеркнув этим, что представление функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ является результатом двух аппроксимаций.

Аппроксимация динамических систем квадратичными сплайнами

Полученные результаты нетрудно обобщить на случай когда для аппроксимации используются одномерные квадратичные сплайны. Применение квадратичных функций при аппроксимации нелинейных ДС приводит к появлению фильтров второго порядка, которые являются обобщением фильтра Калмана-Бьюси и, в принципе, обеспечивают получение более качественных оценок состояния динамической системы. Но при этом значительно увеличиваются вычислительные затраты. С другой стороны, увеличением числа отрезков прямых, аппроксимирующих исходную функцию, можно достичь того же результата, оставаясь в рамках линейной фильтрации (на каждом из рассматриваемых участков области определения нелинейной функции). Увеличение вычислительных затрат при такой стратегии построения фильтра, приводит к необходимости проведения отдельных специальных исследований по сравнению эффективности фильтра при различных конфигурациях. К сожалению, этот вопрос в научной и научно-технической литературе освещен не достаточно. Но в принципе, метод двойной аппроксимации позволяет на втором этапе реализовать любую стратегию построения фильтра (аппроксимация линейными или квадратичными сплайнами), так как процесс аппроксимации проводится независимо по каждой компоненте.

Уравнение, описывающее $q-$ компоненту

нелинейной многомерной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ после двойной аппроксимации, можно представить в виде:

$$f_q(\mathbf{x}) = \sum_j^n K_{qj}\left[a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 + b_{qj}^{(s)} z_{qj} + m_{qj}^{(s)}\right] =$$

$$= \sum_j^n \left[K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 + K_{qj} b_{qj}^{(s)} z_{qj} + K_{qj} m_{qj}^{(s)}\right]. \quad (13)$$

Система дифференциальных уравнений моделирующих нелинейную динамическую систему методом двойной аппроксимации с использованием квадратичных сплайнов имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \sum_j^n \left[K_{1j} a_{1j}^{(s)} z_{1j}^2 + K_{1j} b_{1j}^{(s)} z_{1j} + K_{1j} m_{1j}^{(s)}\right] + n_{11}(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \sum_j^n \left[K_{2j} a_{2j}^{(s)} z_{2j}^2 + K_{2j} b_{2j}^{(s)} z_{2j} + K_{2j} m_{2j}^{(s)}\right] + n_{12}(t) \\ ------------------------ \\ \dfrac{dx_r}{dt} = \sum_j^n \left[K_{rj} a_{rj}^{(s)} z_{rj}^2 + K_{rj} b_{rj}^{(s)} z_{rj} + K_{rj} m_{rj}^{(s)}\right] + n_{1r}(t) \\ z_{qj} = \sum_i^r c_{qij} x_i + d_{qj} \end{cases}, \quad (14)$$

причем коэффициенты, определяющие нелинейную функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ уравнениями (14), принимают значения $A_{qij}^{(s)} = K_{qj} a_{qj}^{(s)}$, $B_{qj}^{(s)} = K_{qj} b_{qj}^{(s)}$, $M_{qj}^{(s)} = K_{qj} m_{qj}^{(s)}$ если обобщенная переменная находится в заданном диапазоне $z_{qj} \in \left[z_{qj}^{(s)},\ z_{qj}^{(s+1)}\right)$. Уравнения (14), в отличие от ситуации, когда на втором этапе используются линейные сплайны, содержат квадратичные слагаемые. Поэтому при переходе к переменным $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2, ...,\ x_r)$ возникают перекрестные члены, содержащие произведения $x_i x_j$. Последнее не позволяет в системе координат $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2, ...,\ x_r)$ обеспечить параллельную и независимую обработку по каждой компоненте функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. При использовании сплайнов первого порядка, переход от обобщенных переменных к переменным – $\mathbf{x}$, не нарушал линейной структуры уравнений. Учитывая это, можно утверждать, что в такой конфигурации представления нелинейной ДС с использованием квадратичных сплайнов менее предпочтительно, чем линейных.

Рассмотрим преобразование системы уравнений, которое позволяет применять квадратичные сплайны, не выходя за рамки независимой параллельной обработки по каждой из компонент нелинейной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Для этого преобразуем выражение содержащее квадрат обобщенной компоненты:

$$z_{qj}^2 = \left(\sum_i^r c_{qji} x_i\right)^2 = \sum_i^r c_{qjii}^2 x_i^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{i<k}^r c_{qji} c_{qjk} \left[(x_i + x_k)^2 - (x_i - x_k)^2\right],$$

Выражение, находящееся в квадратных скобках, определяет новые обобщенные переменные $z1_{ik} = x_i + x_2$, $z2_{ik} = x_i - x_2$. В новых переменных соотношение в квадратных скобках можно записать следующим образом:

$$\sum_{i<k}^r c_{qji} c_{qjk} \left[(x_i + x_k)^2 - (x_i - x_k)^2\right] =$$

$$= \sum_{i<k}^r c_{qji} c_{qjk} z1_{ik}^2 - \sum_{i<k}^r c_{qji} c_{qjk} z2_{ik}^2 .$$

Квадрат обобщенных переменных представим в виде линейных сплайнов с коэффициентами $a1_{qik}^{(s)}, a2_{qik}^{(s)}$ и $b1_{qik}^{(s)}, b2_{qik}^{(s)}$. Соответственно для переменных $z1_{ik}$ и $z2_{ik}$ получаем:

$$\sum_{i<k}^r c_{qji} c_{qjk} z1_{ik}^2 = \sum_{i<k}^r c_{qji} c_{qjk} \left(a1_{qik}^{(s)} z1_{ik} + b1_{qik}^{(s)}\right) =$$

$$= \sum_{i<k}^r C_{qjik} \left(a1_{qik}^{(s)} z1_{ik} + b1_{qik}^{(s)}\right), \quad (15)$$

$$\sum_{i<k}^r c_{qji} c_{qjk} z2_{ik}^2 = \sum_{i<k}^r c_{qji} c_{qjk} \left(a2_{qik}^{(s)} z2_{ik} + b2_{qik}^{(s)}\right) =$$

$$= \sum_{i<k}^r C_{qjik} \left(a2_{qik}^{(s)} z2_{ik} + b2_{qik}^{(s)}\right). \quad (16)$$

Рассмотрим теперь сумму, находящуюся в квадратных скобках (14).

$$K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 + K_{qj} b_{qj}^{(s)} z_{qj} + K_{qj} m_{qj}^{(s)} . \quad (17)$$

Представим каждое из слагаемых, входящее в (17), с учетом выражений (15) и (16). Соответственно имеем:

$$K_{qj} a_{qj}^{(s)} z_{qj}^2 = K_{qj} a_{qj}^{(s)} \left[\sum_i^r c_{qji}^2 x_i^2 + \sum_{i<k}^r C1_{qjik} \left(a1_{qik}^{(s)} z1_{ik} + b1_{qik}^{(s)}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i<k}^r C1_{qjik} \left(a2_{qik}^{(s)} z2_{ik} + b2_{iqk}^{(s)}\right)\right] =$$

$$= K_{qj} a_{qj}^{(s)} \left[\sum_i^r c_{qjii}^2 x_i^2 + \sum_{i<k}^r C1_{qjik} \left(a1_{qik}^{(s)} z1_{ik} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + b1_{qik}^{(s)} - a2_{qik}^{(s)} z2_{ik} - b2_{qik}^{(s)}\right)\right].$$

Для дальнейших упрощений рассмотрим выражение в круглых скобках и перейдем к переменным $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2, ...,\ x_r)$:

$$\left(a1_{qik}^{(s)} z1_{ik} + b1_{qik}^{(s)} - a2_{qik}^{(s)} z2_{ik} - b2_{qik}^{(s)}\right) =$$

$$= a1_{iqk}^{(s)} (x_i + x_k) - a2_{qik}^{(s)} (x_i - x_{ik}) + b1_{qik}^{(s)} - b2_{qik}^{(s)} =$$

$$= \left(a1_{qik}^{(s)} - a2_{qik}^{(s)}\right) x_i + \left(a1_{qik}^{(s)} + a2_{qik}^{(s)}\right) x_k + b1_{qik}^{(s)} - b2_{qik}^{(s)} =$$

$$= A1_{qik}^{(s)} x_i + A2_{iqk}^{(s)} x_k + B1_{qik}^{(s)} .$$

Введем следующие обозначения:

$$A1_{qik}^{(s)} = a1_{qik}^{(s)} - a2_{qik}^{(s)}, \quad A1_{qik}^{(s)} = a1_{qik}^{(s)} + a2_{qik}^{(s)},$$

$$B1_{qik}^{(s)} = b1_{qik}^{(s)} - b2_{qik}^{(s)}.$$

В результате получим выражение для первого слагаемого в (17):

$$K_{qj}a_{qj}^{(s)}z_{qj}^2 = K_{qj}a_{qj}^{(s)}\left[\sum_i^r c_{qji}^2 x_i^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{i<k}^r \left[A1_{qik}^{(s)}x_i + A2_{qik}^{(s)}x_k + B1_{qik}^{(s)} \right] \right]. \qquad (18)$$

Далее проведем операцию суммирования по каждому из слагаемых:

$$K_{qj}a_{qj}^{(s)}z_{qj}^2 = K_{qj}a_{qj}^{(s)}\left[\sum_i^r c_{qjii}^2 x_i^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{i<k}^r A1_{qik}^{(s)}x_i + \sum_{i<k}^r A1_{qik}^{(s)}x_k + \sum_{i<k}^r B1_{qik}^{(s)} \right]. \qquad (19)$$

Перегруппировывая слагаемые и меняя индексы во втором слагаемом, получаем соотношение для первого слагаемого в (17):

$$\sum_{i<k}^r A1_{qik}^{(s)}x_i + \sum_{i<k}^r A1_{qik}^{(s)}x_k = \sum_i^r \sum_{k>i}^r A1_{qik}^{(s)}x_i + \sum_i^r \sum_{k>i}^r A2_{qik}^{(s)}x_k =$$
$$= \sum_i^r x_i \left[\sum_{k>i}^r A1_{qik}^{(s)} \right] + \sum_k^r x_k \left[\sum_{i<k}^r A2_{qik}^{(s)} \right],$$

$$\sum_{i<k}^r A1_{qik}^{(s)}x_i + \sum_{i<k}^r A1_{qik}^{(s)}x_k = \sum_i^r x_i \left[\sum_{k>i}^r \left(A1_{qik}^{(s)} + A2_{qik}^{(s)} \right) \right],$$

$$K_{qj}a_{qj}^{(s)}z_{qj}^2 = \sum_i^r K_{qj}a_{qj}^{(s)}c_{qji}^2x_i^2 + \sum_i^r x_i \left[\sum_{k>i}^r K_{qj}a_{qj}^{(s)} \left(A1_{qik}^{(s)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + A2_{qik}^{(s)} \right) \right] + \sum_{i<k}^r K_{qj}a_{qj}^{(s)}B1_{qik}^{(s)}. \qquad (20)$$

Для второго слагаемого в выражении (17) можно записать:

$$K_{qj}b_{qj}^{(s)}z_{qj} = K_{qj}b_{qj}^{(s)}\sum_i^r c_{qij}x_i = \sum_i^r K_{rj}b_{rj}^{(s)}c_{qij}x_i. \quad (21)$$

Таким образом, для выражения, находящегося в квадратных скобках (17), можно записать:

$$K_{qj}a_{qj}^{(s)}z_{qj}^2 + K_{qj}b_{qj}^{(s)}z_{qj} + K_{qj}m_{qj}^{(s)} =$$
$$= \sum_i^r K_{qj}a_{qj}^{(s)}c_{qjii}^2x_i^2 + \sum_i^r x_i \left[\sum_{k>i}^r K_{qj}a_{qj}^{(s)} \left(A1_{qik}^{(s)} + A2_{qik}^{(s)} \right) \right] +$$
$$+ \sum_i^r K_{qj}b_{qj}^{(s)}c_{qij}x_i + K_{qj}m_{qj}^{(s)} + \sum_{i<k}^r K_{qj}a_{qj}^{(s)}B1_{qik}^{(s)}.$$

Введем следующие обозначения:

$$A_{qjii}^{(s)} = K_{qj}a_{qj}^{(s)}c_{qii}^2, \quad C_{qj}^{(s)} = K_{qj}m_{qj}^{(s)} + \sum_{i<k}^r K_{qj}a_{qj}^{(s)}B1_{qik}^{(s)}. \quad (22)$$

$$B_{qji}^{(s)} = K_{qj}\sum_{k>i}^r \left[a_{qj}^{(s)} \left(A1_{qik}^{(s)} + A2_{qik}^{(s)} \right) + b_{qj}^{(s)}c_{qij}x_i \right] =$$
$$= K_{qj}\sum_{k>i}^r \left[a_{qj}^{(s)}a1_{qik}^{(s)} + b_{qj}^{(s)}c_{qij}x_i \right],$$

Тогда уравнение (17), можно записать в более компактной форме:

$$K_{qj}a_{qj}^{(s)}z_{qj}^2 + K_{qj}b_{qj}^{(s)}z_{qj} + K_{qj}m_{qj}^{(s)} =$$
$$= \sum_i^r A_{qjii}^{(s)}x_i^2 + \sum_i^r B_{qji}^{(s)}x_i + C_{qj}^{(s)}, \qquad (23)$$

С учетом соотношения (23), покомпонентное представление многомерной динамической системы представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \sum_j^n \left[\sum_i^r A_{1jii}^{(s)}x_i^2 + \sum_i^r B_{1ji}^{(s)}x_i + C_{1j}^{(s)} \right] + n_{11}(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \sum_j^n \left[\sum_i^r A_{2jii}^{(s)}x_i^2 + \sum_i^r B_{2ji}^{(s)}x_i + C_{2j}^{(s)} \right] + n_{12}(t) \\ ------------------------ \\ \dfrac{dx_r}{dt} = \sum_j^n \left[\sum_i^r A_{rjii}^{(s)}x_i^2 + \sum_i^r B_{rji}^{(s)}x_i + C_{rj}^{(s)} \right] + n_{1r}(t) \end{cases}, \quad (24)$$

где коэффициенты уравнения (24) принимают значения $A_{qjii}^{(s)}$, $B_{qji}^{(s)}$, $C_{qj}^{(s)}$, если обобщенная переменная z_{qj} принадлежит области $\left[z_{qj}^{(s)},\ z_{qj}^{(s+1)} \right]$, т.е. $z_{qj} \in \left[z_{qj}^{(s)},\ z_{qj}^{(s+1)} \right]$; $z_{qj} = \sum_i^r c_{qij}x_i + d_{qj}$.

В векторно-матричной форме система дифференциальных уравнений может быть представлена в виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)} \right)\mathbf{x}^2 + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} \right)\mathbf{x} + \sum_j^n \mathbf{C}_j + \mathbf{n}_1(t), \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{1j11}^{(s)} & A_{1j22}^{(s)} & .... & A_{1jrr}^{(s)} \\ A_{2j11}^{(s)} & A_{2j22}^{(s)} & .... & A_{2jrr}^{(s)} \\ .... & .... & .... & .... \\ A_{rj11}^{(s)} & A_{rj22}^{(s)} & .... & A_{rjrr}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} B_{1j1}^{(s)} & B_{1j2}^{(s)} & .... & B_{1jr}^{(s)} \\ B_{2j1}^{(s)} & B_{2j2}^{(s)} & .... & B_{2jr}^{(s)} \\ .... & .... & .... & .... \\ B_{rj1}^{(s)} & B_{rj2}^{(s)} & .... & B_{rjr}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_\mathbf{j}^{(\mathbf{s})} = \begin{pmatrix} C_{1j}^{(s)} \\ C_{2j}^{(s)} \\ .... \\ C_{2j}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_r^2 \end{pmatrix}.$$

Особенностью представления (25) является то, что уравнения не содержат смешанных произведений аргументов. Поэтому в отличие, от системы уравнений (10) возможно проведение операций независимого оценивания по каждой компоненте.

В зависимости от выбора, какие коэффициенты полагать установочными, а какие варьируемые можно предложить две различные конфигурации аппроксимаций многомерных функций:

• внешние коэффициенты установочные, внутренние варьируемые;

• внешние коэффициенты варьируемые, внутренние установочные;

Обе конфигурации приводят к интерпретации, предложенной аппроксимации, в виде нейросети, что позволяет при оптимизации варьируемых параметров применять различные методы обучения сети. Наиболее привлекательной, с точки зрения применения строгих математических методов и минимизации вычислительных затрат, представляется конфигурация второго типа, так как в случае определение оптимальных коэффициентов по критерию минимума среднего квадрата ошибки, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Линейная сплайн-фильтрация состояния ДС и сигналов

Построим алгоритм оценивания состояния многомерной динамической системы, основанный на представлениях многомерной функции в виде:

$$f_q(\mathbf{x}) = \sum_j^n K_{qj} z_{qj}^n, \quad H_q(\mathbf{x}) = \sum_j^n K_{qj} z_{qj}^n \tag{26}$$

где $f_q(\mathbf{x})$ – компонента многомерной функции $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$;

$H_q(\mathbf{x})$ – компонента многомерной функции $\mathbf{H} = (H_1, H_2, ..., H_n)$;

K_{qj}, M_{qj} – коэффициенты в разложении функций $\mathbf{f}, \mathbf{H}$.

Покомпонентное представление нелинейной динамической системы, можно записать в форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_q}{dt} = \sum\limits_{\mathrm{j}}^n K_{qj} z_{qj}^n + n_{q\mathbf{1}}(t) \\ u_q(t) = \sum\limits_j^n M_{qj} z_{qj}^n + n_{q\mathbf{0}}(t) \end{cases}. \tag{27}$$

В соответствии с результатами, полученными выше, нелинейную ДС (27) можно по каждой составляющей аппроксимировать одномерными сплайнами: $z_{qj}^n \approx a_{qj}^{(s)} z_{qj} + b_{qj}^{(s)}$, $z_{qj} \in \left[z_{qj}^{(s)}, z_{qj}^{(s+1)} \right]$.

В матричной форме это можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{K}\left[\mathbf{a}^{(s)} \mathbf{z} + \mathbf{b}^{(s)} \right] + \mathbf{n_1}(t) \\ \mathbf{u} = \mathbf{M}\left[\mathbf{a}^{(s)} \mathbf{z} + \mathbf{b}^{(s)} \right] + \mathbf{n_0}(t) \\ \qquad \mathbf{z} = \mathbf{c}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} + \mathbf{d} \end{cases}. \tag{28}$$

Из выражений (27) и (28) следует, что при представлении нелинейной динамической системы одномерными сплайнами появляется дополнительное уравнение, которое обеспечивает пересчет базисных координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_r)$ в базис расширенных координат $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_n)$.

Субоптимальный алгоритм оценки состояния ДС, основанный на кусочно-линейной аппроксимации нелинейных функций, моделируется системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{K}\left[\mathbf{a}^{(s)} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}^{(\mathbf{s})} \right] + \mathbf{P}\left(\mathbf{a}^{(s)} \right)^T \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_0^{-1} \left[\mathbf{u} - \mathbf{M}\left[\mathbf{a}^{(s)} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}^{(s)} \right] \right] \\ \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{K}\mathbf{a}^{(s)} \mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\mathbf{a}^{(s)} \right)^T \mathbf{K}^T - \mathbf{P}\left(\mathbf{a}^{(s)} \right)^T \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{M}\mathbf{a}^{(s)} \mathbf{P} + \mathbf{N_1} \\ \qquad \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{d} \end{cases}. \tag{29}$$

Уравнения (29) должны быть дополнены условием нахождения в области: $\hat{\mathbf{z}} \in \left[\mathbf{z}^{(s)}, \mathbf{z}^{(s+1)} \right) = \mathbf{G}^{(s)}$.

При переходе из одной области $\mathbf{G}^{(s)}$ в другую, производится изменение элементов матриц $\mathbf{a}^{(s)}$, $\mathbf{b}^{(s)}$. Сопряжение решений, получаемых в результате интегрирования (29) в последовательно проходимых областях $\mathbf{G}^{(s)}$, осуществляется на основе условий непрерывности [5]. Фильтр дает приближенное решение задач оценивания вследствие:

• представления исходных нелинейных функций в виде взвешенной суммы одномерных функций;

• приближенности представления кусочно-линейными функциями;

• замены условия $\mathbf{z} \in \mathbf{G}^{(s)}$, условием $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbf{G}^{(s)}$.

Сплайн-фильтрация и обнаружение сигнала на фоне помех

Используя аппроксимацию нелинейной динамической системы одномерными сплайнами, построим математическую модель (ММ) алгоритма фильтрации-обнаружения сигнала на фоне помехи. Модель динамической системы, определяющей задачу обнаружения, имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f} + \mathbf{n_1}(t) \\ \mathbf{u}(t) = \theta\mathbf{s} + \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{n_0}(t) \end{cases}. \tag{30}$$

где $\mathbf{f} = [f_1, f_2, ..., f_M)$, $\mathbf{H} = [H_1, H_2, ..., H_M)$,

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_N].$$

Аппроксимация нелинейной динамической системы одномерными кусочно-линейными функциями представляется как:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{K}\left[\mathbf{a}^{(s)} \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}^{(s)} \right] + \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{u}(t) = \theta\mathbf{s} + \mathbf{M}\left[\mathbf{a}^{(s)} \hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}^{(s)} \right] + \mathbf{n}_0(t) \end{cases}. \tag{31}$$

Уравнения, моделирующие алгоритм фильтрации параметра обнаружения θ, имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_0}{dt} = \mathbf{K}\left[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}^{(s)}\right] + \mathbf{P}\left(\mathbf{a}^{(s)}\right)^T \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_0^{-1}\left[\mathbf{u} - \mathbf{M}\left[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{b}^{(s)}\right]\right] \\ \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}_1}{dt} = \mathbf{K}\left[\mathbf{a}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{b}^{(s)}\right] + \mathbf{P}\left(\mathbf{a}^{(s)}\right)^T \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_0^{-1}\left[\mathbf{u} - \mathbf{M}\left[{}^{(s)}\hat{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{b}^{(s)}\right]\right] \\ \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{K}\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\mathbf{a}^{(s)}\right)^T \mathbf{K}^T - \mathbf{P}\left(\mathbf{a}^{(s)}\right)^T \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{M}\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{P} + \mathbf{N}_1 \\ \dfrac{dL}{dt} = (\mathbf{s} + \hat{\mathbf{z}}_1 - \hat{\mathbf{z}}_0)\mathbf{N}_0^{-1}(2\mathbf{u} - \mathbf{s} - \hat{\mathbf{z}}_1 - \hat{\mathbf{z}}_0) \\ \hat{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{d} \\ \hat{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{d} \end{cases} . \quad (32)$$

Особенностью алгоритмов, представленных формулами (29) и (32) является то, что аппроксимации сплайнами, каждой из обобщенных компонент $\mathbf{z}_i$, имеет один и тот же вид и определяется только парой коэффициентов $\left(\mathbf{a}^{(s)},\ \mathbf{b}^{(s)}\right)$, которые зависят только от номера области, но не от переменной. Кроме того, как видно из самого представления (31), приближение нелинейных функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{H}$ одномерными сплайнами, определяется произведением матриц, одна из которых зависит только от внешних констант: $\mathbf{K}$ (для функции $\mathbf{f}$) и $\mathbf{M}$ (для функции $\mathbf{H}$), а вторая – $\left(\mathbf{a}^{(s)}\mathbf{z} + \mathbf{b}^{(s)}\right)$ не зависит от аппроксимируемой функции и определяется показателем степени базисных переменных $\mathbf{z}$, который одинаков для всех $\mathbf{z} = (z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n)$.

Уравнениям (32) можно придать другую форму, если пересчитать расширенный базис в исходный, в соответствии с формулами:

$$\left.\begin{aligned} A_{qij}^{(s)} \quad & K_{qj} a_{qi}^{(s)} c_{qj} \\ B_{qj}^{(s)} = & K_{qj} a_{qj}^{(s)} d_{qj} + K_{qj} b_{qj}^{(s)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)}\right)\mathbf{x}^T + \sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} . \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} C_{qij}^{(s)} = & M_{qj} a_{qi}^{(s)} c_{qj}, \\ D_{qj}^{(s)} = & M_{qj} a_{qj}^{(s)} d_{qj} + M_{qj} b_{qj}^{(s)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \left(\sum_j^n \mathbf{C}_j^{(s)}\right)\mathbf{x}^T + \sum_j^n \mathbf{D}_j^{(s)} . \quad (34)$$

С учетом (33) и (34) можно записать:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_{\mathrm{j}}^{(s)}\right)\mathbf{x}^T + \sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} + \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{u} = \left(\sum_j^n \mathbf{C}_j^{(s)}\right)\mathbf{x}^T + \sum_j^n \mathbf{D}_j^{(s)} + \mathbf{n}_0(t) \end{cases} . \quad (35)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)}\right)\hat{\mathbf{x}} + \sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)} + \mathbf{P}\left(\sum_j^n \mathbf{A}^{(s)}\right)^T \mathbf{N}_0^{-1}\left[\mathbf{u} - \left(\sum_j^n \mathbf{C}_j^{(s)}\right)\hat{\mathbf{x}} + \sum_j^n \mathbf{D}_j^{(s)}\right] \\ \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = \left(\sum_j^n \mathbf{A}^{(s)}\right)\mathbf{P} + \mathbf{P}\left(\sum_j^n \mathbf{A}^{(s)}\right)^T - \mathbf{P}\left(\sum_j^n \mathbf{A}^{(s)}\right)^T \mathbf{N}_0^{-1}\left(\sum_j^n \mathbf{A}^{(s)}\right)\mathbf{P} + \mathbf{N}_1 \end{cases} . \quad (36)$$

Система уравнений (35) представляет ММ системы оценивания состояния ДС, основанную на одномерных сплайнах первого порядка. Определим такой фильтр как сплайн-фильтр первого порядка.

Квадратичная сплайн-фильтрация состояния ДС и сигналов

Аппроксимация нелинейных ДС кусочно-линейными функциями (сплайн-функции первого порядка), обладает такими достоинствами как простота реализации (следствие линейности) и более высокая точность воспроизведения функций, чем двумя членами степенного ряда Тейлора. В то же самое время имеется тот недостаток, что при переходе из одной подобласти к другой скачкообразно происходит изменение коэффициента усиления фильтра, что приводит к возникновению переходных процессов. Последнее связано с наличием разрывов первого рода производной кусочно-линейной функции. С другой стороны, сплайн первого порядка в принципе ничем не отличается от кусочно-линейной функции. Т.е. на уровне кусочно-линейных представлений преимущества сплайновой интерполяции не выявляются. Поэтому, для исключения переходных процессов и улучшения качества фильтрации процессов, естественно перейти при аппроксимации нелинейных функций в модели ДС, к квадратичным сплайнам [2-5].

Применение напрямую фильтра второго порядка для многомерных ДС представляет собой довольно дорогостоящую, с точки зрения вычислительных затрат, процедуру. Поэтому воспользуемся результатами исследований полученных в [1]. Представим многомерные функции, входящие в описание ДС, в виде совокупности одномерных функций, которые затем аппроксимируем одномерными квадратичными сплайнами. Такое представление значительно проще, так как позволяет рассматривать каждую компоненту многомерной функции независимо от других.

В соответствии с (24): значения матриц $A_{qjii}^{(s)}$, $B_{qji}^{(s)}$, $C_{qj}^{(s)}$ в (24) определяются из выражений:

$$A_{qjii}^{(s)} = K_{qj} a_{qj}^{(s)} c_{qii}^2 ,$$

$$B_{qji}^{(s)} = K_{qj} \sum_{k>i}^{r} \left[a_{qj}^{(s)} a1_{qik}^{(s)} + b_{qj}^{(s)} c_{qij} x_i \right],$$

$$C_{qj}^{(s)} = K_{qj} m_{qj}^{(s)} + \sum_{i<k}^{r} K_{qj} a_{qj}^{(s)} B1_{qik}^{(s)} .$$

В случае если уравнение наблюдения тоже содержит нелинейную функцию $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, то можно выписать аналогичные соотношения для коэффициентов $V_{qjii}^{(s)}$, $U_{qji}^{(s)}$, $J_{qj}^{(s)}$, определяющие аппроксимацию $\mathbf{H}(\mathbf{x})$:

$$V_{qjii}^{(s)} = M_{qj} a_{qj}^{(s)} c_{qii}^2 ,$$

$$U_{qji}^{(s)} = M_{qj} \sum_{k>i}^{r} \left[a_{qj}^{(s)} a1_{qik}^{(s)} + b_{qj}^{(s)} c_{qij} x_i \right],$$

$$J_{qj}^{(s)} = M_{qj} m_{qj}^{(s)} + \sum_{i<k}^{r} M_{qj} a_{qj}^{(s)} B1_{qik}^{(s)} .$$

В векторно-матричной форме система дифференциальных уравнений, моделирующих нелинейную ДС, может быть представлена как:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^2 + \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{B}_j^{(s)} \right) \mathbf{x} + \sum_{j}^{n} \mathbf{C}_j + \mathbf{n}_1(t) \\ \mathbf{z} = \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^2 + \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{U}_j^{(s)} \right) \mathbf{x} + \sum_{j}^{n} \mathbf{J}_j + \mathbf{n}_0(t) \end{cases} . \quad (37)$$

где матрицы и вектора, входящие в описание (37), определяются как:

$$\mathbf{A}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{1j11}^{(s)} & A_{1j22}^{(s)} & .... & A_{1jrr}^{(s)} \\ A_{2j11}^{(s)} & A_{2j22}^{(s)} & .... & A_{2jrr}^{(s)} \\ .... & .... & .... & .... \\ A_{rj11}^{(s)} & A_{rj22}^{(s)} & .... & A_{rjrr}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} B_{1j1}^{(s)} & B_{1j2}^{(s)} & .... & B_{1jr}^{(s)} \\ B_{2j1}^{(s)} & B_{2j2}^{(s)} & .... & B_{2jr}^{(s)} \\ .... & .... & .... & .... \\ B_{rj1}^{(s)} & B_{rj2}^{(s)} & .... & B_{rjr}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} C_{1j}^{(s)} \\ C_{2j}^{(s)} \\ .... \\ C_{2j}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} V_{1j11}^{(s)} & V_{1j22}^{(s)} & .... & V_{1jrr}^{(s)} \\ V_{2j11}^{(s)} & V_{2j22}^{(s)} & .... & V_{2jrr}^{(s)} \\ .... & .... & .... & .... \\ V_{rj11}^{(s)} & V_{rj22}^{(s)} & .... & V_{rjrr}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} U_{1j1}^{(s)} & U_{1j2}^{(s)} & .... & U_{1jr}^{(s)} \\ U_{2j1}^{(s)} & U_{2j2}^{(s)} & .... & U_{2jr}^{(s)} \\ .... & .... & .... & .... \\ U_{rj1}^{(s)} & U_{rj2}^{(s)} & .... & U_{rjr}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\mathrm{j}}^{(s)} = \begin{pmatrix} J_{1j}^{(s)} \\ J_{2j}^{(s)} \\ .... \\ J_{2j}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & ... & x_r^2 \end{pmatrix}.$$

Модель (37) может быть использована при построении фильтров второго порядка. К примеру, воспользуемся структурой модифицированного фильтра второго порядка, который может рассматриваться как частный случай усеченного и гауссовского фильтров. Совокупность уравнений, моделирующих модифицированный фильтр, имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}},t) + 0.5\mathbf{f}_{xx}(\hat{\mathbf{x}},t) : \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{H}_x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_0^{-1}\left[\mathbf{u} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}},t) - 0.5\mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P} \right] \\ \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}},t)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{f}_x^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{x}},t) - \mathbf{P}\mathbf{H}_x^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{x}},t)\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{H}_x(\hat{\mathbf{x}},t)\mathbf{P} + \mathbf{N}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0 \end{cases} . \quad (38)$$

Структура фильтра определяется двумя модулями:

- модуль оценивания состояния динамической системы;
- модуль вычисления корреляционной функции ошибки оценивания.

Структура полученного фильтра охвачена многомерной обратной связью по вектору невязки $\mathbf{u} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}},t) - 0.5\mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P}$. Этот вектор умножается на матрицу интенсивностей шумов измерений $\mathbf{N}_0^{-1}$. Далее следует умножение на $\mathbf{H}_x^{\mathrm{T}}$, что соответствует как бы учету чувствительности векторной функции наблюдения к приращению аргумента, причем производные определяются при оценочном движении $\hat{\mathbf{x}}$. После этого следует умножение на матрицу $\mathbf{P}$, приближенно равную ковариационной матрице оценивания.

В системе уравнений введены следующие обозначения:

$\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – $m-$мерная векторная функция $n-$мерного векторного аргумента, а $\mathbf{P}$ – симметричная матрица размера $n \times n$.

$$\mathbf{f}_{xx} : \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_{\mathbf{i},k=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} \\ .... \\ \sum_{\mathbf{i},k=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_{\mathbf{i},k=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \dfrac{\partial H_1}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} \\ .... \\ \sum_{\mathbf{i},k=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \dfrac{\partial H_m}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^2 + \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{B}_j^{(s)} \right) \mathbf{x} + \sum_{j}^{n} \mathbf{C}_j ;$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \mathbf{x}^2 + \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{U}_j^{(s)} \right) \mathbf{x} + \sum_{j}^{n} \mathbf{J}_j ,$$

можно записать:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}}^2 + \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{B}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \sum_{j}^{n} \mathbf{C}_j ;$$

$$\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}}^2 + \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{U}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \sum_{j}^{n} \mathbf{J}_j ;$$

$$\mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}},t) = 2\left(\sum_{j}^{n} \mathbf{A}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{B}_j^{(s)} \right);$$

$$\mathbf{H}_x(\hat{\mathbf{x}},t) = 2\left(\sum_{j}^{n} \mathbf{V}_j^{(s)} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_{j}^{n} \mathbf{U}_j^{(s)} \right);$$

$$\mathbf{f}_{xx}(\hat{\mathbf{x}},t) = 2\left(\sum_{j}^{n} \mathbf{A}_j^{(s)} \right); \quad \mathbf{H}_{xx}(\hat{\mathbf{x}},t) = 2\left(\sum_{j}^{n} \mathbf{V}_j^{(s)} \right).$$

Подставляя последние выражения в соотношения (38), получаем систему уравнений (40):

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)}\right) : \mathbf{P} + \mathbf{P}\left[2\left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)}\right)\right]^T \mathbf{N}_0^{-1}\left[\mathbf{u} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) - \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)}\right) : \mathbf{P}\right] \\ \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = \left[2\left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)}\right)\right]\mathbf{P} + \mathbf{P}\left[2\left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{B}_j^{(s)}\right)\right]^T - \\ -\mathbf{P}\left[2\left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)}\right)\right]^T \mathbf{N}_0^{-1}\left[2\left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\sum_j^n \mathbf{U}_j^{(s)}\right)\right]\mathbf{P} + \mathbf{N}_1 \\ \qquad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0 \end{cases} . \qquad (40)$$

Так как, в соотношения (37) нет перекрестных членов, то выражения (39) не будет содержать смешанных производных, а только вторые производные по каждой компоненте функций: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, ..., H_n)$ и которые являются суммой одномерных функций. Следствием этого является наличие только диагональных сомножителей P_{ii} в выражении (39). С учетом сказанного, можно записать:

$$\left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)}\right) : \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_i^n \left(\sum_j^n A_{1qii}^{(s)}\right) P_{ii} \\ .... \\ \sum_i^n \left(\sum_j^n A_{nqii}^{(s)}\right) P_{ii} \end{bmatrix},$$

$$\left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)}\right) : \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_i^n \left(\sum_j^n V_{1qii}^{(s)}\right) P_{ii} \\ .... \\ \sum_i^n \left(\sum_j^n V_{1qii}^{(s)}\right) P_{ii} \end{bmatrix}. \qquad (41$$

Оценка вычислительных затрат

Оценим вычислительные затраты при реализации стандартного усеченного фильтра второго порядка и фильтра второго порядка [5], основанного на сплайн-интерполяции одномерными функциями. Оценивание в динамических системах и, в частности, в системах автоматического управления, должно осуществляться синхронно с поступлением информации наблюдения, т.е. в реальном масштабе времени. При этом большое значение приобретает необходимая вычислительная производительность, особенно при оценивании многомерных и многосвязных процессов. В этом отношении алгоритмы второго порядка для сложных систем предъявляют весьма высокие требования к вычислительным средствам. Описанные выше непрерывные алгоритмы оценивания представляют совокупность векторного дифференциального уравнения оценивания состояния и матричного дифференциального уравнения для определения ошибки. Размерность векторов и матриц, входящих в эти уравнения, соответственно равны n и $n \times n$. С учетом симметрии корреляционной матрицы, общее число скалярных дифференциальных уравнений, соответствующих каждому из рассмотренных алгоритмов, составляет $n + 0.5n(n+1)$. Уравнения интегрируются на основе того или иного метода численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (методов Эйлера, Адамса, Рунге-Кутта и др.) с использованием инструментальной информации на каждом шаге. Шаг численного интегрирования Δt ограничивается сверху одним из следующих факторов: устойчивым управлением в реальном времени и численной сходимостью алгоритмов оценивания.

Оценим вычислительные затраты при реализации стандартного усеченного фильтра второго порядка и фильтра второго порядка, основанного на сплайн-интерполяции одномерными функциями.

Оценивание в ДС и, в частности, в системах автоматического управления, должно осуществляться синхронно с поступлением информации наблюдения, т.е. в реальном масштабе времени. При этом большое значение приобретает необходимая вычислительная производительность, особенно при оценивании многомерных и многосвязных процессов. В этом отношении алгоритмы второго порядка для сложных систем предъявляют весьма высокие требования к вычислительным средствам. Описанные выше непрерывные алгоритмы оценивания представляют совокупность векторного дифференциального уравнения оценивания состояния и матричного дифференциального уравнения для определения ошибки.

Одной из характеристик вычислительной «трудоемкости» алгоритма является общее число элементарных арифметических операций на один шаг. Именно в этом отношении алгоритмы оценивания второго порядка значительно сложнее и труднее в реализации по сравнению с алгоритмами первого порядка. Для усеченного фильтра второго порядка (12) наиболее трудоемкими, с точки зрения вычислительных затрат, являются процедуры вычисления $\mathbf{f}_{xx} : \mathbf{P}$ и $\mathbf{H}_{xx} : \mathbf{P}$. Число арифметических операций необходимых для их вычисления, складывается из операций вычисления матриц Гесса $\mathbf{f}_{xx}$ и $\mathbf{H}_{xx}$ и операций вычисления собственно $\mathbf{f}_{xx}:\mathbf{P}$ и $\mathbf{H}_{xx}:\mathbf{P}$. Если на вычисление второй частной производной от скалярной функции тратится в среднем n_{xx} операций, то общее число элементарных арифметических операций, необходимых для однократного вычисления $\mathbf{f}_{xx}:\mathbf{P}$ и $\mathbf{H}_{xx}:\mathbf{P}$ приблизительно равно [5]:

$$N_{xx} = (n+m)n[2n + 0.5(n+1)n_{xx}]. \quad (42)$$

Необходимо отметить указанные выше процедуры вычисления $\mathbf{f_{xx}}:\mathbf{P}$ и $\mathbf{H}_{xx}:\mathbf{P}$ присутствуют как в основном алгоритмическом модуле (определяется оценка $\hat{\mathbf{x}}$), так и в модуле вычисления корреляционной функции.

Следующими по сложности вычислений являются члены: $\mathbf{Pf}_x^T$ и $\mathbf{PH}_x^T$. Если на вычисление 1-ой частной производной от скалярной функции требуется в среднем n_x арифметических операций, то общее число элементарных операций, необходимых для однократного вычисления $\mathbf{Pf}_x^T$ и $\mathbf{PH}_x^T$ составит примерно [5]: $N_x = (n+m)n(2n+n_x)$.

Таким образом, общие вычислительные затраты раны $N = N_x + N_{xx}$:

$$N = (n+m)n[4n + n_x + 0.5(n+1)n_{xx}] \Rightarrow$$
$$N \sim n^4. \quad (43)$$

Определим вычислительные затраты, соответствующие алгоритму оценивания (40). В соответствии с выражениями (41) они содержат только диагональные элементы, поэтому для вычисления

$$\left(\sum_j^n \mathbf{A}_j^{(s)}\right):\mathbf{P} \text{ и } \left(\sum_j^n \mathbf{V}_j^{(s)}\right):\mathbf{P}$$

требуется в n раз операций меньше чем по формуле (42).

То же самое можно сказать о вычислении $\mathbf{Pf}_x^T$ и $\mathbf{PH}_x^T$. Здесь также вычислительные затраты будут меньше в n раз. Как итог, общие вычислительные затраты будут пропорциональны кубу размерности: $N \sim n^3$. С ростом размерности системы оценивания, выигрыш в вычислительных затратах будет расти пропорционально n.

Таким образом, аппроксимация нелинейной составляющей ДС с помощью сплайнов (линейного или квадратичного) является наиболее перспективным направлением с точки зрения использования этих моделей в задачах оценивания. Применение сплайнов более высоких степеней в задачах нелинейной фильтрации представляется довольно проблематичным: во-первых, из-за сложности реализующего алгоритма, а во-вторых, даже незначительный выигрыш в точности может быть полностью нивелирован различного рода неопределенностями присутствующих в ДС (качество аппроксимации, погрешности измерений, шумы округления, точность исходных математических моделей самой ДС, принятых законов распределений случайных процессов, начальных условий и т.д.)

Заключение

Отметим основные научные результаты, полученные в настоящей статье.

1. Описаны нелинейные динамические системы, основанные на представлении многомерных функций в виде линейной суперпозиции одномерных функций, заданных в обобщенном базисе.

2. Разработаны алгоритмы субоптимального оценивания и фильтрации, использующие линейную сплайн-интерполяцию многомерных функций.

3. Разработаны алгоритмы оценивания нелинейных динамических систем, представленных в виде одномерных сплайнов.

4. Разработаны алгоритмы субоптимального оценивания и обнаружения сигналов, использующие кусочно-линейные представления.

5. Проведена оценка вычислительных затрат, необходимых для реализации разработанного метода, основанного на представлении квадратичными сплайнами. Показано, что его реализация требует в n раз меньше элементарных вычислительных операций (умножений) чем аналогичный фильтр второго порядка.

Список литературы

1. Бутырский Е.Ю. Аппроксимация многомерных функций // Информация и космос. – 2006. – №4. – с.40-51.

2. Бурова И.Г., Демьянович Ю.К. Теория минимальных сплайнов. – СПб.:СПбГУ, 2001. – 315 с.

3. Голубков А.Ю. Построение внешних и внутренних функций представления непрерывных функций многих переменных суперпозицией непрерывных функций одного переменного // Фундаментальная и прикладная математика. – М.: МГУ, 2002. – т.8. – №1. – с.27-38.

4. Демьянович Ю.К. Покальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. – СПб.:СПбГУ, 1994. – 346 с.

5. Крассовский А.А. Справочник по теории автоматического управления. – М.:, Наука, 1987. – 711 с.

6. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде

суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения. – ДАН СССР, 1957. – т.114. – №5. – с.953-956.

7. Арнольд В.И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. – М.: Математическое просвещение, 1958. – № 3. – с.41-61.

8. Александрова И.М., Проурзин В.А. Метод аффинных преобразований в задаче равномерной аппроксимации функций многих переменных // Вопросы механики и процессов управления. – Выпуск 18. – Математические вопросы анализа негладких моделей. – СПб.:СПбГУ, 1995. – с.19-30.

9. Голубков А.Ю. Построение внешних и внутренних функций представления непрерывных функций многих переменных суперпозицией непрерывных функций одного переменного // Фундаментальная и прикладная математика. – М.: МГУ, 2002. –т.8. – №1. – с.27-38.

10. Мордашев И.М. Аппроксимация функций нескольких переменных суммой меньшего числа переменных. – ДАН СССР, 1968. – Т.18. – №4. – с.778-779.

11. Поспелов В.В. О приближении функций нескольких переменных произведениями функций одного переменного. – М.: Институт прикладной математики АН СССР. – Препринт №32, 1978. – 72с.

12. Шура-Бура М.Р. Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного // Вычислительная математика. – 1957. – Вып.27. – с.3-19.