Е. Ю. БУТЫРСКИЙ

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОЦЕССОВ

Санкт-Петербург
2019

ББК 22.171
Т46
УДК 519.21

Бутырский Е.Ю. Методы моделирования и оценивания случайных величин и процессов. – СПб.: «Стратегия будущего», 2020. – 642с.

ISBN 978-5-4268-0054-0

Монография знакомит с основами теории и практики методов математического исследования стохастических систем и процессов. В ней рассмотрены модели, методы описания и формирования случайных событий, величин и процессов, а также методы их оптимального и субоптимального оценивания. Монография может быть полезна для широкого круга специалистов в различных областях знания, занимающихся вопросами математического и статистического моделирования в своих исследованиях, а также может быть использована в учебном процессе для проведения как аудиторных, так и самостоятельных теоретических и практических занятий со студентами и магистрами СПбГУ, занимающихся по программе «Математическое моделирование» и «Оптимальное и субоптимальное оценивание случайных процессов и систем».

Рецензенты

Жабко А.П. – заслуженный работник высшей школы Российской федерации, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления Санкт-Петербургского государственного университета,

Чудаков О.Е. – заслуженный работник высшего профессионального образования Российской федерации доктор технических наук, профессор, начальник отдела ООО «Пассат».

ISBN 978-5-4268-0054-0
9 785426 800540

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

АКФ	автокорреляционная функция
АПВ	апостериорная плотность вероятности
АРСС	авторегрессии скользящего среднего
АЦП	аналого-цифровой преобразователь
АЧХ	амплитудно-частотная характеристика
БГШ	белый гауссовский шум
БПФ	быстрое преобразование Фурье
БСВ	базовая случайная величина
ВКФ	взаимокорреляционная функция
ГС	гармонический сигнал
ГСП	гауссовское случайное поле
ДС	динамическая система
ДСВ	датчик случайных величин
ДСЧ	датчик случайных чисел
ДУ	дифференциальное уравнение
ИМ	имитационная модель
ИХ	импульсная характеристики
КФ	корреляционная функция
ЦОС	цифровая обработка сигналов
ММП	метод максимального правдоподобия
МНК	метод наименьших квадратов
МО	математическое ожидание
МП	марковский процесс
ОДУ	обыкновенное дифференциальное уравнение
ОККО	оценочно-корреляционно-компенсационный обнаружитель
ПВ	плотность вероятности
ПВБШ	пространственно-временной белый шум
ПРВ	плотность распределения вероятности
ПС	полигармонический сигнал
ПФ	полосовой фильтр
РП	реверберационная помеха
РУ	решающее устройство
СА	спектральный анализ
СВ	случайная величина
СДУ	стохастическое дифференциальное уравнение
СКО	среднеквадратическая ошибка
СП	случайный процесс
СЧ	случайное число
ФНЧ	фильтр низких частот
ФПК	Фоккера-Планка-Колмогорова
ФРВ	функция распределения вероятностей
ЦАП	цифро-аналоговый преобразователь
ЦОС	цифровая обработка сигналов
ФЧХ	фазочастотная характеристика
ФФ	формирующий фильтр

ВВЕДЕНИЕ

Методология научного подхода к исследованию любого явления, объекта, процесса или системы состоит в формировании, основанных на опыте и интуиции *абстрактных представлений* и различных *моделей*, адекватность и целесообразность которых проверяется практикой. Важнейшим этапом в этом процессе познания является *моделирование*.

В настоящее время трудно назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной мере не использовались бы методы моделирования. Любая деятельность человека, так или иначе, связана с моделированием. Изучение явлений, объектов или процессов сопровождается введением связей между элементами и их формальным описанием с помощью различных знаков и символов.

Метод моделирования широко применяют в таких областях, как проектирования в автоматизированных системах научных исследований, в системах массового обслуживания, анализ различных сторон деятельности человека, автоматизированное управление производственными, военными, общественными и другими процессами. Важно подчеркнуть, что моделирование используется также при проектировании, создании, внедрении и эксплуатации систем, а также на различных уровнях их изучения, начиная от анализа работы элементов и кончая исследованием системы в целом при их взаимодействии с окружающей средой. В принципе, любая область науки и техники может рассматриваться как моделирование.

На этапе исследования и проектирования систем при построении и реализации аналитических и имитационных моделей широко используется *метод статистического моделирования* (Монте-Карло), который базируется на использовании случайных чисел, т.е. возможных значений некоторой случайной величины (СВ) с заданным распределением вероятностей. Статистическое моделирование представляет собой метод получения с помощью ЭВМ статистических данных о процессах, происходящих в моделируемой системе. Для получения представляющих интерес оценки характеристик моделируемой системы S с учетом воздействий внешней среды E статистические данные обрабатываются и классифицируются с использованием методов математической статистики.

Метод *статистического моделирования* дает возможность конструировать ряд важных задач алгоритмы, хорошо приспособленные к реализации на компьютерах. Возникновение метода Монте-Карло связывают обычно с именами Дж. Неймана, С. Улама, Н.Метрополиса, а также Г. Кана и Э. Ферми; все они в 40-х годах работали в Лос-Аламосе (США) над созданием первой атомной бомбы. В нашей стране первые работы были опубликованы в 1955–1956 годах В.В. Чавчанидзе, Ю.А. Шрейдером и В.С. Владимировым.

Сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы S некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды E, и реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ.

Метод статистического моделирования применяют:

- *для изучения стохастических систем;*
- *для решения детерминированных задач.*

Основной идеей, которая используется для решения детерминированных задач методом статистического моделирования, является замена детерминированной задачи эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные характеристики последней совпадают с результатом решения детерминированной задачи. При такой замене погрешность уменьшается с увеличением числа испытаний N. В результате статистического моделирования системы S получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении *реального объекта или процесса в произвольные моменты времени*. Если количество реализации N достаточно велико, то полученные результаты моделирования системы приобретают *статистическую устойчивость* и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве оценок искомых характеристик процесса функционирования системы S.

При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учет стохастических воздействий. Количество случайных чисел, используемых для получения статистически устойчивой оценки характеристики процесса функционирования системы S при реализации моделирующего алгоритма на ЭВМ, колеблется в достаточно широких пределах в зависимости от класса объекта моделирования, вида оцениваемых характеристик, необходимой точности и достоверности результатов моделирования. Для метода статистического моделирования на ЭВМ характерно, что большое число операций, а соответственно большая доля машинного времени расходуются на действия со случайными числами. Кроме того, результаты статистического моделирования существенно зависят от качества исходных (базовых) последовательностей случайных чисел. Поэтому наличие простых и экономичных способов формирования последовательностей случайных чисел требуемого качества во многом определяет возможность практического использования машинного моделирования системы.

В монографии рассматриваются также вопросы математического и статистического моделирования различных классов случайных процессов, а также принципы моделирования случайных полей, т. е. случайных функций нескольких переменных. Случайный процесс представляет гораздо белее сложный объект исследования чем случайная величина, поэтому не существует универсального подхода, который позволял бы строить конструктивные и практически реализуемые алгоритмы моделирования для произвольного случайного процесса. В связи с этим, рассматривают классы процессов, для каждого из которых синтезируют алгоритм моделирования. В пособии рассматриваются вопросы оптимального и субоптимального оценивания случайных процессов, в частности, методы Колмогорова-Винера и Калмана-Бьюси. Основное внимание уделено методам моделирования стационарных нормальных случайных процессов, так как эти процессы, с одной стороны, имеют наибольшее распространение в качестве математических моделей различного рода флюктуаций в радиотехнике, а с другой стороны, имея эффективные алгоритмы для моделирования стационарных нормальных случайных процессов, можно сравнительно просто получить алгоритмы для моделирования других классов случайных процессов, именно тех случайных процессов, которые можно рассматривать как порождаемые стационарными нормальными процессами при различных линейных и нелинейных преобразованиях. Задачу цифрового моделирования случайных процессов с помощью скользящего суммирования и рекуррентных разностных уравнений можно рассматривать как задачу синтеза линейного дискретного формирующего фильтра, который преобразует дискретный белый шум в коррелированный дискретный случайный процесс с заданными корреляционно-спектральными характеристика ми. В случае моделирования многомерных процессов ставится задача синтеза соответствующих многомерных формирующих фильтров. Ниже рассматриваются различные методы решения этих задач применительно к моделированию стационарных (в том числе и многомерных) и нестационарных нормальных случайных процессов. В основном рассматриваются дискретные случайные процессы, порождаемые непрерывными. При синтезе дискретных формирующих фильтров широко используются свойства исходных непрерывных процессов и систем.

1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Реальные сложные системы и объекты можно исследовать с помощью двух типов моделей: аналитических и имитационных. В аналитических моделях поведение сложных систем записывается в виде некоторых функциональных или логических соотношений. Наиболее полное исследование удается провести в том случае, когда получены явные зависимости, связывающие искомые величины с параметрами сложной системы и начальными условиями их изучения. Однако это удается выполнить только для сравнительно простых систем. Для сложных систем исследователю зачастую приходится идти на упрощения представления реальных явлений, что дает возможность описать их поведение и представить взаимодействия между компонентами сложной системы. Это позволяет изучить некоторые общие свойства системы, например, оценить устойчивость системы и сходимость реального переходного процесса к некоторому значению.

Когда явления в системе настолько сложны и многообразны, что аналитическая модель становится слишком грубым приближением к действительности, то исследователь вынужден использовать *имитационное моделирование.*

Имитационная модель (ИМ) − это формальное описание логики функционирования исследуемой системы и взаимодействия отдельных ее элементов во времени, учитывающее наиболее существенные причинно-следственные связи, присущие системе, и обеспечивающее проведение экспериментов.

В имитационной модели поведение компонентов сложной системы описывается набором алгоритмов, которые затем реализуют ситуации, возникающие в реальной системе. Моделирующие алгоритмы позволяют по исходным данным, содержащим сведения о начальном состоянии системы, и фактическим значениям параметров системы отобразить реальные явления в системе и получить сведения о возможном поведении системы для данной конкретной ситуации. На основании этой информации исследователь может принять соответствующие решения. Успешное применение имитационного моделирования стало возможным в результате развития вычислительной техники [2, 14, 20-22, 64, 76, 90, 96, 124].

Статистическое моделирование является частным случаем имитационного моделирования и является способом искусственной имитации реальных стохастических явлений.

Метод статистического моделирования (или метод Монте-Карло) − это способ исследования поведения вероятностных систем (экономических, технических и т. д.) в условиях, когда не известны в полной мере внутренние взаимодействия в этих системах [168, 169].

Этот метод заключается в воспроизведении исследуемого физического процесса при помощи вероятностной математической модели и вычислении характеристик этого процесса. Одно такое воспроизведение функционирования системы называют реализацией или испытанием. После каждого испытания регистрируют совокупность параметров, характеризующих случайный исход реализации. Метод основан на многократных испытаниях построенной модели с последующей статистической обработкой полученных данных с целью определения числовых характеристик рассматриваемого процесса в виде статистических оценок его параметров.

Основой метода статистического моделирования является закон больших чисел. Закон больших чисел в теории вероятностей доказывает для различных условий сходимость по вероятности средних значений результатов большого числа наблюдений к некоторым постоянным величинам.

Статистическое моделирование состоит из процесса разработки математической модели реального стохастического объекта (явления) и постановки эксперимента над этой моделью. По результатам статистического моделирования определяют оценки вероятностных критериев качества, общих и частных, характеризующих функционирование и эффективность исследуемой системы.

Статистическое моделирование широко применяется для решения научных и прикладных задач в различных областях науки и техники. Успех и точность статистического моделирования зависят в основном от качества последовательности случайных чисел и выбора оптимального алгоритма моделирования.

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В данной главе рассматриваются основные понятия теории вероятности, математической статистики и теории случайных процессов, необходимые для их последующего использования в прикладных задачах и, в частности, с теорией статистического моделирования.

Статистическое моделирование неразрывно связано с теорией вероятности и математической статистикой и как любая другая наука, она при изучении материального мира оперирует теми или иными понятиями, среди которых имеются основополагающие. К таким основным понятиям можно отнести понятия: *случайное событие, случайная величина, случайный процесс, эксперимент*. Здесь необходимо указать различие между объектами исследования теории вероятности и математической статистики. Теория вероятности является теоретической наукой и средством добывания априорных знаний, основные понятия которой выводятся на основе дедуктивного метода из конечного набора аксиом. Вследствие чего она оперирует непосредственно со случайными величинами, событиями и процессами, которые представляют собой дискретные или непрерывные множества чисел или функций, заданных в некотором числовом или функциональном пространстве. Поэтому их описание носит вид детерминированных функций, а числовые характеристики являются неслучайными. Задачей математической статистики является получение апостериорных знаний, на основе наблюдений за окружающими явлениями, объектами и процессами. Таким образом, математическая статистика имеет дело с наблюдаемыми реализациями случайных событий, величин или процессов, получаемых в результате проведения опытов (экспериментов) и, которые в совокупности не дают полного представления об изучаемых случайных объектах, а их описание является только оценкой истинных функций и числовых характеристик, вследствие чего они также являются стохастическими (случайными). Здесь необходимо отметить, что каждая конкретная реализация, получаемая в результате проведения опыта, сама по себе не является случайной. Это является следствием того, что их совокупность всегда конечная и каждая совокупность, полученная в результате своей серии опытов, содержит только ей соответствующие реализации. Поэтому процедуры осреднения, применяемые к конкретным совокупностям, дают различные оценки.

Первичным понятием теории вероятностей является эксперимент G, *определяемый как комплекс условий, который может быть воспроизведён сколько угодно раз. Осуществление эксперимента приводит к элементарному исходу* ω, *совокупность которых образует множество* (*пространство*) *элементарных исходов* $\mathbf{\Omega}$.

Дальнейшее построение теоретико-вероятностных объектов связано, согласно предложенной в 1929 г. А. Н. Колмогоровым логической схеме, с привлечением понятий теории множеств. Вероятностное *событие A* понимается как любое подмножество пространства Ω. В частности, имеют место достоверное событие $A = \Omega$, совпадающее со всем пространством элементарных исходов (кубик выпадет хоть какой-то гранью), и невозможное событие $A = \varnothing$, являющееся пустым множеством.

События, отличающиеся от достоверных и невозможных, называются случайными (вероятностными, стохастическими)

Рассмотрим основные понятия. используемые в статистическом моделировании и, которые «перекочевали» из теории вероятности и математической статистики [72-74,88,110,113,123,129].

Одним из таких понятий является – *событие.*

Определение 1.1. *Под событием понимается явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определяющего комплекса условий.*

Осуществление этого комплекса условий обычно называют опытом или *испытанием.* Можно дать также дать следующее определение события.

Определение 1.2. Событием *называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.*

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие A может произойти совместно с событием B, в другом – нет.

Определение 1.*3. Случайным опытом или экспериментом называется процесс, при котором возможны различные исходы, так что нельзя заранее предсказать, каков будет результат.*

Предполагается, что комплекс условий, в результате которого наступает событие, может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз, т.е. имеется возможность проводить неоднократные испытания в неизменных условиях. Задачей эксперимента является получение совокупности реализаций случайной величины или процесса, по которой можно сделать те или иные статистические выводы.

Определение 1.4. *Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания.*

На практике часто встречаются события, которые обязательно происходят в результате определенного испытания.

Определение 1.5. *Событие называется достоверным, если оно обязательно происходит в результате испытания.*

Определение 1.6. *Событие противоположное достоверному называется невозможным.*

Определение 1.7. *Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно.*

При многократном проведении опыта в неизменных условиях в общем случае будут получены различные значения случайной величины, что обусловлено случайными факторами, которые невозможно предусмотреть. Непостоянство результата такого опыта может быть связано с наличием случайных ошибок измерений или со статистической природой самой измеряемой величины.

Определение 1.8. *Дискретной случайной величиной называют такую случайную величину, множество значений которой либо конечное, либо бесконечное, но счетное.*

Кроме дискретных СВ рассматривают также непрерывные.

Определение 1.9. *Непрерывной случайной величиной называется некоторая величина, которая случайным образом принимает значения из некоторого континуума возможных значений.*

Будем обозначать отдельные значения, которые принимает случайная величина (не обязательно численные), как X_i, где $i = \overline{1, n}$. Любая функция от X_i будет также случайной величиной.

Определение 1.10. *События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.*

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение 1.11. Полной группой событий *называется совокупность всех возможных результатов опыта.*

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение 1.12. *События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.*

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Исходя из этих общих понятий можно дать определение вероятности.

Определение 1.13. Вероятностью *события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта.*

Вероятность P события A — это числовая функция (мера) соответствующего подмножества, которая задаётся аксиоматически посредством трёх условий.

1) Неотрицательность: $P(A) \geq 0$.
2) Условие нормировки: $P(\Omega) = 1$, т. е. вероятность достоверного события равна единице.
3) Аддитивность вероятности несовместных событий: $A = \bigcup_k A_k$ и для любых $k \neq l$ справедливо $A_k \bigcap A_l = \varnothing$ то $P(A) = \sum_k P(A_k)$.

Такой аксиоматический подход к определению вероятности позволяет определять различные соответствия между событиями (и составляющими их элементарными исходами) и их вероятностными мерами или, как говорят, различные распределения вероятностей.

Общая схема построения вероятностей событий для экспериментов с конечным числом элементарных исходов имеет следующий вид.

1. Выписывается (фактически или умозрительно) N-элементное пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_N\}.$$

2. Выбирается N-элементный набор неотрицательных чисел (вероятностей) $p_1, p_2, ..., p_N$, удовлетворяющих условию нормировки, т. е. сумма которых равна единице:

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = 1, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Определяются различные представляющие интерес события A_k как различные наборы входящих в Ω элементарных исходов:

$$A_k = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_N\}.$$

Вероятность события A равна отношению числа, благоприятствующих событию A исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию A, если п*оявление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А*.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример 1.1. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С.

Тогда в соответствие с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Определение 1.14. Относительной частотой *события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.*

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна: $W(A) = \frac{2}{5}$.

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Классическое определение вероятности позволяет найти численное значение вероятности события, однако его практическая значимость низка по той причине, что класс испытаний, удовлетворяющих условиям классической схемы, слишком ограничен. Чаще встречаются такие эксперименты, с которыми невозможно связать какие-либо конечные пространства Ω с равновозможными элементарными исходами.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие ***геометрической вероятности***, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l / L.

Теория вероятностей и математическая статистика являются родственными дисциплинами, предметами исследования которых являются в некотором роде взаимно-обратные задачи: если в теории вероятностей, как правило, необходимо, исходя из общих закономерностей, предсказать характеристики конкретного поведения объекта (среднее состояние, выбросы и др.), то целью математической статистики является, наоборот, построение общих закономерностей, описывающих объект, на основании анализа конкретного поведения

1.1.1. Операции над событиями

Типичной формой закона, устанавливаемого научной теорией, является следующая: создание условий А неизбежно приводит к В. Цель теории – определение условий, при которых какое-либо интересующее нас событие заведомо происходит или заведомо не происходит, т.е. эти условия могут быть выражены по одной из двух схем: а) если осуществляется комплекс условий А, то с достоверностью происходит событие В; б) если осуществляется комплекс условий А, то событие В произойти не может. В первом случае событие В по отношению к комплексу условий А называется достоверным, а во втором – невозможным. Такие события принято называть детерминированными. Они с неизбежностью следуют после осуществления соответствующего комплекса условий. Другими словами, комплекс условий А в этом случае однозначно определяет событие В. Событие В, которое при осуществлении комплекса условий А иногда происходит, а иногда не происходит, называется случайным по отношению к данному комплексу условий. Дадим строгое определение случайного события, для чего приведем понятие об элементарных событиях.

Возможные события, порождаемые комплексом условий, называются элементарными: а) если они различны (т.е. осуществление одного означает неосуществление любого другого); б) после выполнения комплекса условий обязательно происходит одно из них.

Заметим, что эти условия определяют элементарные события неоднозначно: даже в одной и той же задаче они могут быть определены по-разному.

Обозначим через $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ *пространство элементарных событий.* Тогда любое объединение элементарных событий называется случайным событием $B \subseteq \Omega$. Событие B осуществляется тогда, когда происходит одно из элементарных событий $\omega \in B \bigcap_{i=1}^{n} X_i$. В этом смысле пространство Ω может рассматриваться тоже как событие. Одно из элементарных событий происходит всегда, следовательно, и событие Ω происходит всегда, поэтому оно достоверное.

Событие, не содержащее ни одного элементарного события, является невозможным и обозначается $\varnothing$.

Понятие вероятности опирается на теоретико-множественные операции или, что эквивалентно, на теоретико-вероятностные операции суммы и пересечения событий, с которыми связаны формулы сложения и умножения вероятностей.

Таким образом, мы пришли к описанию случайных событий как множеств, получающихся объединением элементарных событий. В связи с этим для определения соотношений между случайными событиями в теории вероятностей принят язык теории множеств, который приобретает своеобразную вероятностную трактовку. Поясним некоторые из них с помощью табл.1.1.

Определение 1.15. *События А и называются* ***равными****, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.*

Определение 1.16. Объединением (суммой) *событий A_k называется событие А, которое означает появление хотя бы одного из событий A_k:*

$$A = \bigcup_k A_k .$$

Определение 1.17. Пересечением (произведением) *событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении всех событий A_k*

$$A = \bigcap_k A_k$$

Определение 1.18. Разностью *событий А и называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В:*

$$C = A \setminus B$$

Определение 1.19. Дополнительным *к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А* ***не происходит.***

Таким образом, теория вероятности основана на теории множеств и является формальной аксиоматической теорией, в которой существует изоморфизм между понятиями теории множеств и понятиями случайных событий.

Определение 1.20. Элементарными исходами *опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.*

Таблица 1.1

Язык теории множеств	Соотношения между событиями на языке теории множеств
$A = B \cup C$	Событие A (объединение событий B и C) происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий B и C
$A = B \cap C$	Событие A (пересечение событий B и C) происходит тогда и только тогда, когда происходят и событие B, и событие C
$B \cap C = \varnothing$	События B и C являются несовместными. Если событие C происходит, то событие B не происходит
$C \subset B$	Событие C влечет за собой событие B
$A = \Omega \setminus B$, $(A = \overline{B})$	Событие A является дополнительным (противоположным) по отношению к событию B. Событие A происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие B
$A = B \setminus C$	Событие A происходит тогда и только тогда, когда событие B происходит, а событие C не происходит

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется ***пространством элементарных событий***.

Теорема 1.1 (сложения вероятностей)*. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Следствие 1.1. *Если события* $A_1, A_2, ..., A_n$ *образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:* $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

Через понятие несовместных событий можно определить противоположное событие.

Определение 1.21. Противоположными *называются два несовместных события, образующие полную группу.*

Имеет место следующая теорема для совместных событий.

Теорема 1.2. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:* $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Следствие 1.2. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:* $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Таким образом, сумма вероятностей в полной группе событий всегда равна 1. Это следует из того, что в такой группе обязательно какое-либо событие произойдет.

Определение 1.22. *Событие А называется* ***независимым*** *от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется* ***зависимым*** *от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.*

Одним из важнейших понятий в теории вероятности является понятие *условной вероятности*

Определение 1.23. *Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется* ***условной вероятностью*** *события В.*

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A)$$

Важное место в теории вероятности имеет *теорема умножения*.

Теорема 1.3 (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило:* $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$

Также можно записать: $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A)$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из определения условной вероятности.

Если события независимые, то $P(B/A) = P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид: $P(AB) = P(A)P(B)$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1q_2...q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n$.

Пример 1.2. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Решение. Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$. Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

Пример 1.3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Решение. Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие A, вторым – событие B, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$. Тогда имеют место следующие вероятности:

$$P(A)=0,7;\quad P(\overline{A})=0,3;\quad P(B)=0,8;\quad P(\overline{B})=0,2.$$

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет равна: $P(A)P(\overline{B})=0,7\cdot 0,2=0,14$.

Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет равна:

$$P(\overline{A})P(B)=0,3\cdot 0,8=0,24.$$

Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком равна:

$$P=0,14+0,24=0,38.$$

Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны: $P(A)P(B)=0,7\cdot 0,8=0,56;\quad P(\overline{A})P(\overline{B})=0,3\cdot 0,2=0,06.$

Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок равна:

$$P=1-0,56-0,06=0,38.$$

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения:

$$P\left(A_1+A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-P\left(A_1A_2\right).$$

Для вычисления вероятности суммы нескольких событий используется следующая общая формула:

$$P\left(\sum_{i=1}^{K}A_i\right)=\sum_{i}^{K}P\left(A_i\right)-\sum_{j>1}P\left(A_iA_j\right)+\ldots+\sum_{k>j>1}P\left(A_iA_jA_k\right)-\sum_{l>k>j>1}P\left(A_iA_jA_kA_l\right)+\ldots\ .$$

Если рассматриваемые события $A_1\ldots A_K$ таковы, что каждые два из них несовместны, то получаем совокупность независимых событий, для которых вероятность суммы событий равна сумме вероятностей

$$P\left(\sum_{i=1}^{K}A_i\right)=\sum_{i}^{K}P\left(A_i\right).$$

1.1.2. Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие *A* может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события *A* при наступлении события H_i:

$$P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n).$$

Теорема 1.4. *Вероятность события A, которое может произойти вместе с одним из событий* $H_1, H_2, ..., H_n$, *равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события A:* $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$.

Доказательство. ◄ Так как события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, то событие *A* можно представить в виде следующей суммы:

$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$ События $H_1, H_2, ..., H_n$ несовместны, поэтому и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$. При этом $P(AH_i) = P(H_i) P(A/H_i)$. Окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$ ►.

Пример 1.4. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Решение. Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$. Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0,4^2 = 0,16$;
- для второго стрелка: $p_2^2 = 0,6^2 = 0,36$;
- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0,8^2 = 0,64$;

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3} p_1^2 + \frac{1}{3} p_2^2 + \frac{1}{3} p_3^3 = \frac{1}{3}(0,16 + 0,36 + 0,64) = \frac{29}{75}.$$